Matemática

Programa de Estudio
Segundo medio

Ministerio de Educación

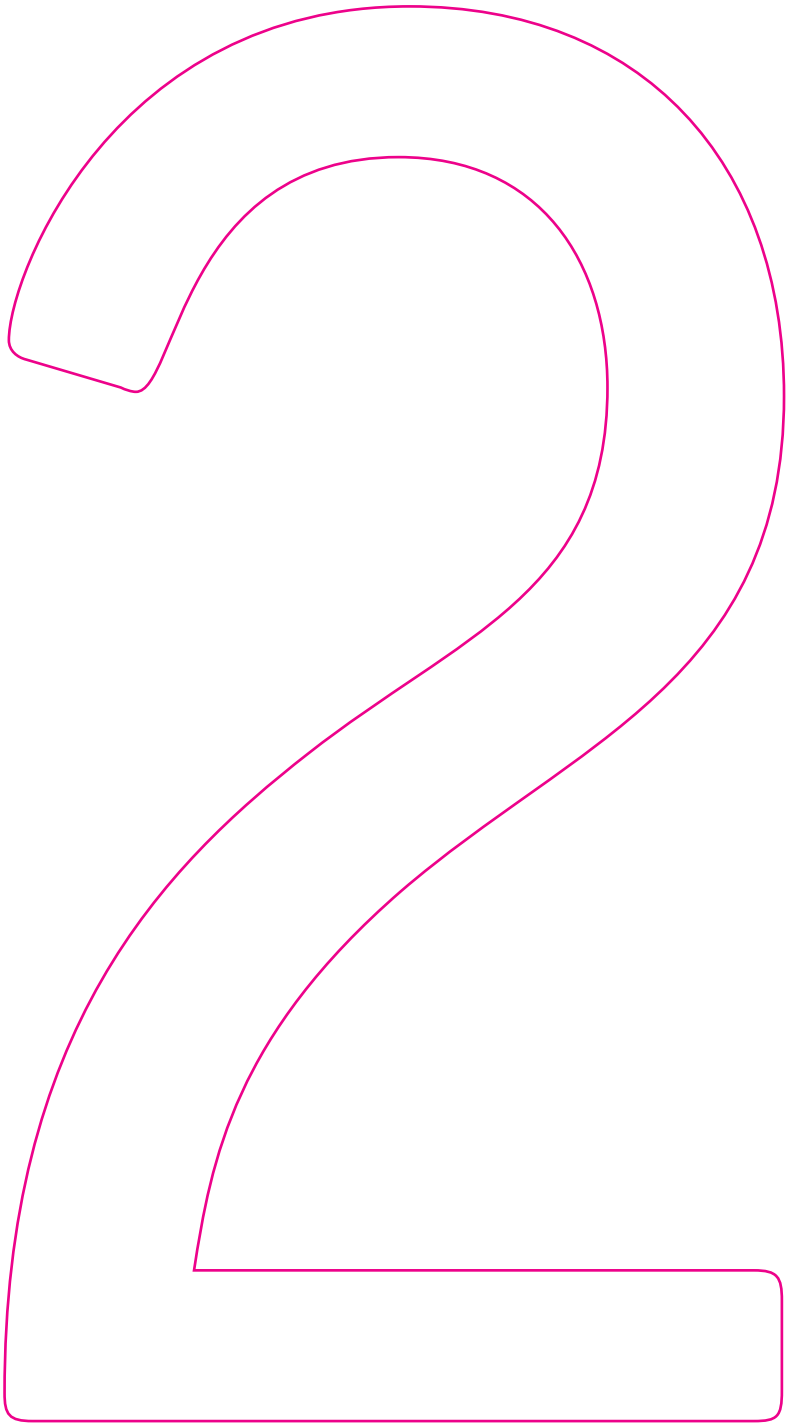
2

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

Matemática

Programa de Estudio
Segundo medio
Ministerio de Educación



Ministerio de Educación de Chile

MATEMÁTICA
Programa de Estudio
Segundo medio
Primera edición: noviembre 2016

Decreto Exento N° 1264/2016

Unidad de Currículum y Evaluación
Ministerio de Educación de Chile
Avenida Bernardo O'Higgins 1371
Santiago de Chile

ISBN 9789562926058

Se sugiere verificar la legitimidad y buen funcionamiento de las páginas web recomendadas en este Programa de Estudio. Dado el tiempo desde su publicación, puede que alguna de ellas hayan caducado o conduzcan a otros sitios.

Estimadas y estimados miembros de la Comunidad Educativa:

En el marco de la agenda de calidad y las transformaciones que impulsa la Reforma Educacional en marcha, estamos entregando a ustedes los Programas de Estudio para 1° y 2° medio correspondientes a las asignaturas de Artes Visuales, Ciencias Naturales, Educación Física y Salud, Historia, Geografía y Ciencias Sociales, Inglés, Lengua y Literatura, Matemática, Música, Orientación y Tecnología.

Estos Programas han sido elaborados por la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación, de acuerdo a las definiciones establecidas en las Bases Curriculares de 2013 y 2015 (Decreto Supremo N° 614 y N° 369, respectivamente) y han sido aprobados por el Consejo Nacional de Educación, para entrar en vigencia a partir de 2017 en 1° medio y el 2018 en 2° medio.

Los Programas de Estudio –en tanto instrumentos curriculares– presentan una propuesta pedagógica y didáctica que apoya el proceso de gestión curricular de los establecimientos educacionales. Desde esta perspectiva, se fomenta el trabajo docente para la articulación y generación de experiencias de aprendizajes pertinentes, relevantes y significativas para sus estudiantes, en el contexto de las definiciones realizadas por las Bases Curriculares que entran en vigencia para estos cursos en los años 2017 y 2018. Los Programas otorgan ese espacio a los y las docentes, y pueden trabajarse a partir de las necesidades y potencialidades de su contexto.

Es de suma importancia promover el diálogo entre estos instrumentos y las necesidades, intereses y características de las y los estudiantes. De esta manera, complejizando, diversificando y profundizando en las áreas de aprendizaje, estaremos contribuyendo al desarrollo de las herramientas que requieren para desarrollarse como personas integrales y desenvolverse como ciudadanos y ciudadanas, de manera reflexiva, crítica y responsable.

Por esto, los Programas de Estudio son una invitación a las comunidades educativas de nuestros liceos a enfrentar el desafío de preparación, estudio y compromiso con la vocación formadora y con las expectativas de aprendizajes que pueden lograr las y los estudiantes. Invito a todos y todas a trabajar en esta tarea de manera entusiasta, colaborativa, analítica y respondiendo a las necesidades de su contexto educativo.

Cordialmente,

ADRIANA DELPIANO PUELMA
MINISTRA DE EDUCACIÓN

Índice

Presentación	8	
Nociones básicas	10	
Orientaciones para implementar el Programa	14	
Orientaciones para planificar el aprendizaje	21	
Orientaciones para evaluar los aprendizajes	24	
Estructura del Programa de Estudio	28	
Matemática		
	36	Introducción
	38	Organización curricular
	43	Orientaciones didácticas
	46	Orientaciones de evaluación
Propuesta de organización curricular anual		
	52	Objetivos de Aprendizaje para 2° medio
	57	Visión global de los Objetivos de Aprendizaje del año
	61	Visión global de las actitudes del año

Semestre 1

64 Unidad 1

94 Unidad 2

Semestre 2

122 Unidad 3

152 Unidad 4

Bibliografía

178 Bibliografía para el o la docente

181 Sitios web recomendados

182 Bibliografía para el o la estudiante

Anexos

186 Anexo 1: Glosario

204 Anexo 2: Progresión de habilidades de 7° básico a 2° medio

208 Anexo 2: Progresión de Objetivos de Aprendizaje temáticos de 7° básico 2° medio

Presentación

Las Bases Curriculares, por medio de los Objetivos de Aprendizaje (OA), definen la expectativa formativa que se espera que logren las y los estudiantes en cada asignatura y curso. Dichos objetivos integran conocimientos, habilidades y actitudes fundamentales para que los y las jóvenes alcancen un desarrollo armónico e integral que les permita enfrentar su futuro con las herramientas necesarias para participar de manera activa, responsable y crítica en la sociedad.

Las Bases Curriculares son un referente para los establecimientos que deseen elaborar programas propios, de modo de posibilitarles una decisión autónoma respecto de la manera en que se abordan los Objetivos de Aprendizaje planteados. Las múltiples realidades de las comunidades educativas de nuestro país dan origen a una diversidad de aproximaciones curriculares, didácticas, metodológicas y organizacionales que se expresan en distintos procesos de gestión curricular, los cuales deben resguardar el logro de los Objetivos de Aprendizaje definidos en las Bases. En esta línea, las Bases Curriculares no entregan orientaciones didácticas específicas, sino que proveen un marco a nivel nacional, en términos de enfoque y expectativas formativas.

Al Ministerio de Educación le corresponde la tarea de elaborar Programas de Estudio que entreguen una propuesta pedagógica para la implementación de las Bases Curriculares para aquellos establecimientos que no optan por generar programas propios. Estos Programas constituyen un complemento coherente y alineado con las Bases y buscan ser una herramienta de apoyo para las y los docentes.

Los Programas de Estudio proponen una organización de los Objetivos de Aprendizaje de acuerdo con el tiempo disponible dentro del año escolar. Dicha organización es de carácter orientador y, por tanto, los profesores y las profesoras deben modificarla de acuerdo a la realidad de sus estudiantes y de su escuela, considerando los criterios pedagógicos y curriculares acordados por la comunidad educativa. Adicionalmente, para cada Objetivo de Aprendizaje se sugiere un conjunto de Indicadores de Evaluación que dan cuenta de diversos aspectos que permiten evidenciar el logro de los aprendizajes respectivos.

Cada Programa proporciona, además, orientaciones didácticas para la asignatura que trata y diversas actividades de aprendizaje y de evaluación, de carácter flexible y general, que pueden ser utilizadas, modificadas o remplazadas por otras, según lo estime conveniente cada docente. Las actividades se complementan con sugerencias para las profesoras y los profesores, recomendaciones de recursos didácticos y bibliografía tanto para docentes como para estudiantes.

En síntesis, estos Programas de Estudio se entregan a los establecimientos educacionales como un apoyo para llevar a cabo su labor de enseñanza, en el marco de las definiciones de la Ley General de Educación (Ley N° 20.370 de 2009, del Ministerio de Educación). Así, su uso es voluntario, pues dicha ley determina que cada institución escolar puede elaborar sus propios programas en función de los Objetivos de Aprendizaje establecidos en las Bases Curriculares.

Nociones básicas

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE COMO INTEGRACIÓN DE CONOCIMIENTOS, HABILIDADES Y ACTITUDES

Los Objetivos de Aprendizaje definen –para cada asignatura– los aprendizajes terminales esperables para cada año escolar. Se refieren a conocimientos, habilidades y actitudes que permiten a los y las estudiantes avanzar en su desarrollo integral, mediante la comprensión de su entorno y la generación de las herramientas necesarias para participar activa, responsable y críticamente en él.

Estos Objetivos de Aprendizaje tienen foco en aspectos esenciales de las disciplinas escolares, por lo que apuntan al desarrollo de aprendizajes relevantes, así como que las y los estudiantes pongan en juego conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto de la asignatura como al desenvolverse en su vida cotidiana.

La distinción entre conocimientos, habilidades y actitudes no implica que estas dimensiones se desarrollen de forma fragmentada durante el proceso formativo, sino que –por el contrario– manifiesta la necesidad de integrarlas pedagógicamente y de relevar las potencialidades de cada proceso de construcción de aprendizaje.

CONOCIMIENTOS

Los conocimientos corresponden a conceptos, redes de conceptos e información sobre hechos, procesos, procedimientos y operaciones. Esta definición considera el conocimiento como información (sobre objetos, eventos, fenómenos, procesos, símbolos, etc.) y abarca, además, la comprensión de los mismos por parte de las y los estudiantes. Por consiguiente, este conocimiento se integra a sus marcos explicativos e interpretativos, los que son la base para desarrollar la capacidad de discernimiento y de argumentación.

Los conceptos propios de cada asignatura ayudan a enriquecer la comprensión de los y las estudiantes sobre el mundo que los y las rodea y los fenómenos que experimentan u observan. La apropiación profunda de los enfoques, teorías, modelos, supuestos y tensiones existentes en las diferentes disciplinas permite a las y los estudiantes reinterpretar el saber que han elaborado por medio del sentido

común y la vivencia cotidiana (Marzano et al., 1997). En el marco de cualquier disciplina, el manejo de conceptos clave y de sus conexiones es fundamental para que los alumnos y las alumnas construyan nuevos aprendizajes. El logro de los Objetivos de Aprendizaje de las Bases Curriculares implica necesariamente que las y los estudiantes conozcan, expliquen, relacionen, apliquen, analicen y cuestionen determinados conocimientos y marcos referenciales en cada asignatura.

HABILIDADES

Las habilidades son capacidades para realizar tareas y para solucionar problemas con precisión y adaptabilidad. Pueden desarrollarse en los ámbitos intelectual, psicomotriz o psicosocial.

En el plano formativo, las habilidades son cruciales al momento de integrar, complementar y transferir el aprendizaje a nuevos contextos. La continua expansión y la creciente complejidad del conocimiento demandan capacidades de pensamiento crítico, flexible y adaptativo que permitan evaluar la relevancia de la información y su aplicabilidad a distintas situaciones, desafíos, contextos y problemas.

Así, desarrollar una amplia gama de habilidades es fundamental para fortalecer la capacidad de transferencia de los aprendizajes, es decir, usarlos de manera juiciosa y efectiva en otros contextos. Los Indicadores de Evaluación y los ejemplos de actividades de aprendizaje y de evaluación sugeridos en estos Programas de Estudio promueven el desarrollo de estos procesos cognitivos en el marco de la asignatura.

ACTITUDES

Las Bases Curriculares detallan un conjunto de actitudes específicas que surgen de los Objetivos de Aprendizaje Transversales (OAT) y que se espera promover en cada asignatura.

Las actitudes son disposiciones desarrolladas para responder, en términos de posturas personales, frente a objetos, ideas o personas, que propician determinados tipos de comportamientos o acciones.

Las actitudes son determinantes en la formación de las personas, pues afectan todas las dimensiones de la vida. La escuela es un factor definitorio en el desarrollo de las actitudes de las y los estudiantes y puede contribuir a formar ciudadanos responsables y participativos, que tengan disposiciones activas, críticas y comprometidas frente a una variedad de temas trascendentes para nuestra sociedad.

Es responsabilidad de la escuela diseñar experiencias de aprendizaje que generen una actitud abierta y motivación por parte de las y los estudiantes, y nutrir dicha actitud durante todo el proceso, de manera que, cuando terminen la educación formal, mantengan el interés por el aprendizaje a lo largo de toda la vida. Promover actitudes positivas hacia el descubrimiento y el desarrollo de habilidades mejora significativamente el compromiso de los alumnos y las alumnas con su propia formación, lo que, a su vez, genera aprendizajes más profundos e impacta positivamente en su autoestima.

Asimismo, el desarrollo de las actitudes presentes en los OAT y en las Bases Curriculares, en general, permite a los y las estudiantes comprender y tomar una posición respecto del mundo que los y las rodea, interactuar con él y desenvolverse de manera informada, responsable y autónoma.

Las actitudes tienen tres dimensiones interrelacionadas: cognitiva, afectiva y experiencial. La dimensión cognitiva comprende los conocimientos y las creencias que una persona tiene sobre un objeto. La afectiva corresponde a los sentimientos que un objeto suscita en los individuos. Finalmente, la experiencial se refiere a las vivencias que la persona ha acumulado con respecto al objeto o fenómeno. De lo anterior se desprende que, para formar actitudes, es necesario tomar en cuenta estas tres dimensiones. Por ejemplo, para generar una actitud positiva hacia el aprendizaje es necesario analizar con las y los estudiantes por qué esto es beneficioso, explicitar las creencias que ellas y ellos tienen al respecto, y promover un ambiente de diálogo en el cual todas y todos expresen su posición, se interesen y valoren el desarrollo intelectual; de esta manera, es posible suscitar experiencias de aprendizaje interesantes y motivadoras.

El desarrollo de actitudes no debe limitarse solo al aula, sino que debe proyectarse hacia los ámbitos familiar y social. Es fundamental que los alumnos y las alumnas puedan satisfacer sus inquietudes, ser proactivos, proactivas y líderes, adquirir confianza en sus capacidades e ideas, llevar a cabo iniciativas, efectuar acciones que los y las lleven a alcanzar sus objetivos, comunicarse en forma efectiva y participar activamente en la construcción de su aprendizaje. De este modo, las y los estudiantes se verán invitadas e invitados a conocer el mundo que las y los rodea, asumir un compromiso con mejorarlo, mostrar mayor interés por sus pares y trabajar en forma colaborativa, valorando las contribuciones de otros y otras.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE TRANSVERSALES (OAT)

La educación es definida por la Ley General de Educación como "el proceso de aprendizaje permanente que abarca las distintas etapas de la vida de las personas y que tiene como finalidad alcanzar su desarrollo espiritual, ético, moral, afectivo, intelectual, artístico y físico, mediante la transmisión y el cultivo de valores, conocimientos y destrezas" (Mineduc, 2009). En este escenario, la escuela y el liceo, atendiendo al rol educativo que se les ha delegado, juegan un rol fundamental en el proceso formativo de las y los estudiantes.

En este contexto, los Objetivos de Aprendizaje Transversales (OAT) aluden tanto al desarrollo personal y social de los y las estudiantes como al desarrollo relacionado con el ámbito del conocimiento y la cultura. El logro de los OAT depende de la totalidad de elementos que conforman la experiencia escolar, la que se ve influida por los énfasis formativos declarados en el Proyecto Educativo Institucional; los procesos de gestión curricular y pedagógica que llevan a cabo las y los docentes y los equipos directivos; las dinámicas de participación y convivencia; las normas, ceremonias y símbolos de la escuela; los aprendizajes abordados en cada asignatura; el despliegue de iniciativas de los y las estudiantes; las interacciones y dinámicas que se establecen en los espacios de recreos, así como las relaciones humanas y vínculos que se generan en la cotidianeidad escolar entre todos los integrantes de la comunidad educativa.

Dada su relevancia, los Objetivos de Aprendizaje Transversales deben permear los instrumentos de gestión y la organización del tiempo escolar, las experiencias de aprendizaje que se diseñarán, los instrumentos evaluativos y todas aquellas instancias en que se pueda visibilizar la importancia de estas disposiciones frente a la comunidad educativa.

De acuerdo a lo planteado en las Bases Curriculares de 7º básico a 2º medio, los OAT involucran las siguientes dimensiones: física, afectiva, cognitiva/intelectual, moral, espiritual, proactividad y trabajo, sociocultural y ciudadana, y uso de tecnologías de la información y la comunicación (TIC) (Mineduc, 2013). Los Programas de Estudio plantean un conjunto de actitudes específicas que se integran a los conocimientos y a las habilidades propias de cada asignatura y que derivan de dichas dimensiones.

Orientaciones para implementar el Programa

Las orientaciones que se presentan a continuación destacan elementos que son relevantes al momento de emplear el Programa de Estudio y que permiten abordar de mejor manera los Objetivos de Aprendizaje especificados en las Bases Curriculares.

ETAPA DEL DESARROLLO DE LAS Y LOS ESTUDIANTES

La etapa de la adolescencia está marcada por un acelerado desarrollo en los ámbitos físico, cognitivo, social y emocional. Es una etapa favorable para que los y las estudiantes avancen en autonomía y en la comprensión integral del mundo que los rodea. Por ello, es propicio fomentar en las alumnas y los alumnos la construcción de la identidad, la propia imagen y opinión, el desarrollo de la capacidad de monitorear y regular sus desempeños –para facilitar la metacognición y la autorregulación–, y el fortalecimiento de la empatía y el respeto por diferentes miradas sobre un mismo tema.

La interacción se vuelve un tema central en esta etapa del desarrollo. Las y los estudiantes empiezan a interesarse más por participar en intercambios sociales, a la vez que las opiniones de los pares adquieren mayor importancia. En este contexto, el desarrollo de una identidad y opinión propia se vuelve fundamental, así como también contar con las herramientas necesarias para reaccionar adecuadamente frente a las ideas de otros y otras.

En este periodo, los y las estudiantes transitan por procesos de fortalecimiento del pensamiento formal, el que les permite hacer relaciones lógicas, desarrollar el pensamiento crítico, comprender conceptos abstractos y vincular concepciones aparentemente disímiles (Alexander, 2006). Así, es una etapa oportuna para desarrollar una visión más crítica del mundo y para robustecer su capacidad de análisis, de planificación y de establecer hipótesis, lo que, a su vez, les permite plantear otras formas de resolver problemas.

En la adolescencia, las y los estudiantes además empiezan a abrir sus ámbitos de interés y a relacionarse con sus pares en términos de gustos, valores y creencias. En esta etapa, se remarca la necesidad de visualizar una relación entre su aprendizaje y sus vidas, lo que promueve su motivación a aprender. Asimismo, el desarrollo de una mayor independencia y autonomía puede llevar a los y las estudiantes a

reflexionar sobre las experiencias de aprendizaje que experimentan, y a elegir la que les parece más atractiva.

El presente Programa de Estudio incluye ejemplos de actividades que pretenden ser significativas y desafiantes para las y los estudiantes adolescentes, pues plantean problemas vinculados con su cotidianeidad y con referentes concretos que conducen hacia la comprensión de conceptos progresivamente más abstractos. La implementación del presente Programa requiere que el o la docente guíe a sus estudiantes a conectar los aprendizajes del ámbito escolar con otros ámbitos de sus vidas y con su propia cultura o la de otras y otros. Para ello, es necesario que conozca los diversos talentos, necesidades, intereses y preferencias de las alumnas y los alumnos, para que las actividades de este Programa sean efectivamente instancias significativas en el ámbito personal y social.

Las actividades se diseñaron como un reto que motive a los alumnos y las alumnas a buscar evidencia y usar argumentos coherentes y bien documentados para solucionarlas. Para ello, las y los estudiantes deberán movilizar sus propios conocimientos de cada asignatura, aplicar habilidades de pensamiento superior (concluir, evaluar, explicar, proponer, crear, sintetizar, relacionar, contrastar, entre otras) y fortalecer aspectos actitudinales, como la confianza en las propias capacidades, la curiosidad, la rigurosidad y el respeto por los y las demás.

Esta propuesta plantea tareas más exigentes, complejas y de ámbitos cada vez más específicos que en los cursos anteriores. No obstante dicha dificultad, es necesario que las y los docentes promuevan intencionadamente la autonomía de los y las estudiantes (por ejemplo, dando espacios para la elección de temas y actividades o para el desarrollo de iniciativas personales), con el propósito de incentivar la motivación por aprender y la autorregulación.

Es fundamental que las profesoras y los profesores entreguen un acompañamiento juicioso, flexible y cercano a las demandas de sus estudiantes para que las actividades de trabajo colaborativo que se incorporen para el logro de distintos objetivos sean una instancia que conduzca a construir aprendizajes profundos y significativos, y a desarrollar de mejor forma habilidades y actitudes para comunicarse y trabajar con otros y otras.

INTEGRACIÓN Y APRENDIZAJE PROFUNDO

El conocimiento se construye sobre la base de las propias experiencias y saberes previos. Diversos estudios en neurociencia señalan que el ser humano busca permanentemente significados y patrones en los fenómenos que ocurren a su alrededor, lo que, sumado a la influencia que ejercen las emociones sobre los procesos cognitivos, es fundamental para lograr un aprendizaje profundo. Por ello, las experiencias de aprendizaje deben evocar emociones positivas y diseñarse con un nivel adecuado de exigencia, de modo que representen un desafío cognitivo para las alumnas y los alumnos. Investigar, realizar conexiones y transferencias a otras áreas, plantear y resolver problemas complejos, argumentar creencias y teorías, y organizar información de acuerdo a modelos propios son algunos ejemplos de actividades adecuadas para la construcción del aprendizaje.

La integración entre distintas asignaturas, disciplinas y áreas constituye un escenario pedagógico de gran potencial para lograr este propósito. Existe vasta literatura que respalda que el aprendizaje ocurre con más facilidad y profundidad cuando el nuevo material se presenta desde distintas perspectivas, pues permite relacionarlo con conocimientos previos, enriquecerlo, reformularlo y aplicarlo (Jacobs, 1989). Debido a esta integración, los y las estudiantes potencian y expanden sus conocimientos y acceden a nueva información y a diversos puntos de vista. Además, apreciar que el saber es interdisciplinario les permite visualizar que deben ser capaces de usar conocimientos, habilidades y actitudes de varias áreas para desenvolverse en la vida cotidiana y, a futuro, en el mundo laboral.

El presente Programa de Estudio ofrece alternativas de integración disciplinar en diversas actividades, mas es preciso tener en cuenta que las oportunidades de interdisciplinariedad que brindan las Bases Curriculares son amplias y trascienden lo propuesto en este instrumento. En consecuencia, se recomienda a las y los docentes buscar la integración de asignaturas y procurar que los y las estudiantes desarrollen sus habilidades simultáneamente desde diferentes áreas.

IMPORTANCIA DEL LENGUAJE

En cualquier asignatura, aprender supone poder comprender y producir textos propios de la disciplina, lo que requiere de un trabajo en clases, precisamente, con textos disciplinares. Leer y elaborar textos permite repensar y procesar la información, reproducir el conocimiento y construirlo; por lo tanto, el aprendizaje se profundiza. Para que las y los estudiantes puedan comprender y producir textos es necesario que la o el docente les entregue orientaciones concretas, pues ambos procesos implican una serie de desafíos.

Para promover el aprendizaje profundo mediante la lectura y la producción de textos orales y escritos, se sugiere tener en cuenta –entre otras– las siguientes consideraciones:

- En lectura, se debe estimular a que los y las estudiantes amplíen y profundicen sus conocimientos mediante el uso habitual de diversa bibliografía, para que así mejoren las habilidades de comprensión lectora. Es importante que aprendan, especialmente, a identificar las ideas centrales, sintetizar la información importante, explicar los conceptos clave, identificar los principales argumentos usados para defender una postura, descubrir contradicciones, evaluar la coherencia de la información y generar juicios críticos y fundamentados en relación con lo leído. Para ello se requiere que las y los docentes modelen y retroalimenten sistemáticamente el proceso.
- En escritura, es necesario que el o la docente incentive a sus alumnos y alumnas a expresar sus conocimientos, ideas y argumentos, escribiendo textos con la estructura propia de cada disciplina, como un ensayo, un informe de investigación o una reseña histórica, entre otros. Para esto se les debe orientar a que organicen la información para comunicarla con claridad al lector, seleccionando información relevante, profundizando ideas y entregando ejemplos y argumentos que fundamenten dichas ideas.
- En relación con la comunicación oral, es importante considerar que el ambiente de la sala de clases debe ser propicio para que las y los estudiantes formulen preguntas, aclaren dudas, demuestren interés por aprender y construyan conocimiento colaborativamente. En este contexto, es fundamental que el o la docente estimule a sus estudiantes a participar en diálogos en los que cuestionen, muestren desacuerdo y lleguen a consensos, en un clima de trabajo en el que se respete a las personas y sus ideas y se valore el conocimiento y la curiosidad.

TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN (TIC)

Los Objetivos de Aprendizaje Transversales de las Bases Curriculares contemplan, explícitamente, que las alumnas y los alumnos aprendan a usar las tecnologías de la información y la comunicación (TIC). Esto demanda que se promueva el dominio de estas tecnologías de manera integrada al trabajo propio de cada asignatura.

En el nivel básico, los y las estudiantes debieran desarrollar las habilidades elementales para usar las TIC y, en el nivel medio, se espera que lleven a cabo estas operaciones con mayor fluidez, además de otras de mayor dificultad (buscar información y evaluar su pertinencia y calidad, aportar en redes virtuales de comunicación o participación, utilizar distintas TIC para comunicar ideas y argumentos, modelar información y situaciones, entre otras).

Los Programas de Estudio elaborados por el Ministerio de Educación integran el desarrollo de habilidades de uso de las TIC en todas las asignaturas con los propósitos detallados a continuación.

- Trabajar con información:
  - Utilizar estrategias de búsqueda para recoger información precisa.
  - Seleccionar información examinando críticamente su calidad, relevancia y confiabilidad.
  - Ingresar, guardar y ordenar información de acuerdo a criterios propios o predefinidos.

- Crear y compartir información:
  - Desarrollar y presentar información usando herramientas y aplicaciones de imagen o audiovisuales, procesadores de texto, presentaciones digitalizadas y gráficos, entre otros medios.
  - Usar herramientas de comunicación en línea para colaborar e intercambiar opiniones en forma respetuosa con pares, miembros de una comunidad y expertos o expertas (correos electrónicos, blogs, redes sociales, chats, foros de discusión, conferencias web, diarios digitales, etc.).

- Profundizar aprendizajes:
  - Usar *software* y programas específicos para aprender y complementar los conceptos trabajados en las diferentes asignaturas.
  - Usar procesadores de texto, *software* de presentación y planillas de cálculo para organizar, crear y presentar información, gráficos o modelos.

- Actuar responsablemente:
  - Respetar y asumir consideraciones éticas en el uso de las TIC.
  - Señalar las fuentes de las cuales se obtiene la información y respetar las normas de uso y de seguridad.
  - Identificar ejemplos de plagio y discutir las posibles consecuencias de reproducir el trabajo de otras personas.

En este marco, se vuelve fundamental que las profesoras y los profesores consideren la integración curricular de las TIC en el diseño e implementación de los procesos formativos en las distintas asignaturas como una estrategia que apoya y fortalece la construcción de aprendizaje de sus estudiantes.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

En el trabajo pedagógico, es importante que los y las docentes tomen en cuenta la diversidad entre estudiantes en términos culturales, sociales, étnicos, religiosos, de género, de estilos de aprendizaje y de niveles de conocimiento. Esta diversidad enriquece los escenarios de aprendizaje y está asociada a los siguientes desafíos para las profesoras y los profesores:

- Promover el respeto a cada estudiante, evitando cualquier forma de discriminación y evitando y cuestionando estereotipos.
- Procurar que los aprendizajes se desarrollen de una manera significativa en relación con el contexto y la realidad de las y los estudiantes.
- Trabajar para que todas y todos alcancen los Objetivos de Aprendizaje señalados en el currículum, acogiendo la diversidad como una oportunidad para desarrollar más y mejores aprendizajes.

Atender a la diversidad de estilos y ritmos de aprendizaje no implica tener expectativas más bajas para algunos alumnos o algunas alumnas. Por el contrario, hay que reconocer los requerimientos personales de cada estudiante para que todos y todas alcancen los propósitos de aprendizaje pretendidos. En este sentido, conviene que, al diseñar el trabajo de cada unidad, la o el docente considere dichos requerimientos para determinar los tiempos, recursos y métodos necesarios para que cada estudiante logre un aprendizaje de calidad.

Mientras más experiencia y conocimientos tengan las profesoras y los profesores sobre su asignatura y las estrategias que promueven un aprendizaje profundo, más herramientas tendrán para tomar decisiones pertinentes y oportunas respecto de las necesidades de sus alumnos y alumnas. Por esta razón, los Programas de Estudio incluyen numerosos Indicadores de Evaluación, observaciones a la o el docente, sugerencias de actividades y de evaluación, entre otros elementos, para apoyar la gestión curricular y pedagógica. En el caso de estudiantes con necesidades educativas especiales, tanto el conocimiento de las y los docentes como el apoyo y las recomendaciones de las y los especialistas que evalúan a dichos alumnos y dichas alumnas contribuirán a que todos y todas desarrollen al máximo sus capacidades.

Para favorecer la atención a la diversidad, es fundamental que los y las docentes, en su quehacer pedagógico, lleven a cabo las siguientes acciones:

- Generar ambientes de aprendizaje inclusivos, lo que implica que cada estudiante debe sentir seguridad para participar, experimentar y contribuir de forma significativa a la clase. Se recomienda destacar positivamente las características particulares y rechazar toda forma de discriminación, agresividad o violencia.
- Utilizar materiales, aplicar estrategias didácticas y desarrollar actividades que se adecuen a las singularidades culturales y étnicas de las y los estudiantes y a sus intereses. Es importante que toda alusión a la diversidad tenga un carácter positivo y que motive a los alumnos y las alumnas a comprenderla y valorarla.
- Promover un trabajo sistemático, con actividades variadas para diferentes estilos de aprendizaje y con ejercitación abundante, procurando que todos y todas tengan acceso a oportunidades de aprendizaje enriquecidas.
- Proveer igualdad de oportunidades, asegurando que las alumnas y los alumnos puedan participar por igual en todas las actividades y evitando asociar el trabajo de aula con estereotipos asociados a género, a características físicas o a cualquier otro tipo de sesgo que provoque discriminación.

Orientaciones para planificar el aprendizaje

La planificación de las experiencias de aprendizaje es un elemento fundamental en el esfuerzo por promover y garantizar los aprendizajes de los y las estudiantes. Permite maximizar el uso del tiempo y definir los procesos y recursos necesarios para que las alumnas y los alumnos logren dichos aprendizajes, así como definir la mejor forma para evidenciar los logros correspondientes.

Los Programas de Estudio entregados por el Ministerio de Educación son un insumo para que las y los docentes planifiquen las experiencias de aprendizaje; se diseñaron como una propuesta flexible y, por tanto, adaptable a la realidad de los distintos contextos educativos del país.

Los Programas incorporan los mismos Objetivos de Aprendizaje definidos en las Bases Curriculares respectivas. En cada curso, estos objetivos se ordenan en unidades e incluyen un tiempo estimado para ser trabajados. Tales tiempos son una alternativa que se debe revisar y corresponde a cada profesor o profesora adaptar dicha propuesta de acuerdo a los criterios de su institución escolar y a la realidad de sus estudiantes. Además, los Programas de Estudio contienen Indicadores de Evaluación coherentes con los Objetivos de Aprendizaje y sugerencias de actividades de aprendizaje y de evaluación, que son un apoyo pedagógico para planificar y desarrollar los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Al planificar para un curso determinado, se recomienda considerar los siguientes aspectos:

- La diversidad de intereses, niveles y ritmos de aprendizaje de las y los estudiantes de un mismo curso.
- El tiempo real con que se cuenta, de manera de optimizar el recurso temporal disponible.
- Las prácticas pedagógicas, propias o de otros, que –en contextos similares– han dado resultados satisfactorios.
- Los recursos disponibles para el aprendizaje de la asignatura.

Una planificación efectiva involucra una reflexión que debe incorporar aspectos como:

- Explicitar y organizar temporalmente los Objetivos de Aprendizaje respondiendo preguntas como: ¿Qué queremos que aprendan las y los estudiantes durante el año? ¿Para qué queremos que lo aprendan? ¿Cuál es la mejor secuencia para organizar los objetivos de acuerdo a esta realidad escolar?[1]
- Definir o seleccionar cómo se evidenciará el logro de cada Objetivo de Aprendizaje. Los Indicadores de Evaluación pueden ser iluminadores en el momento de evaluar el logro de los Objetivos de Aprendizaje y pueden dar señales para diseñar situaciones evaluativas que den espacio a las alumnas y los alumnos para mostrar sus aprendizajes[2]. Con este propósito se deben responder preguntas como: ¿Qué debieran ser capaces de realizar los y las estudiantes que han logrado un determinado Objetivo de Aprendizaje? ¿Cómo se pueden levantar evidencias para constatar que se han logrado los aprendizajes?
- Definir el propósito de las evaluaciones que se realizarán, tanto formativas como sumativas, e integrar instancias de retroalimentación que enriquezcan el aprendizaje.
- Determinar qué oportunidades o experiencias de aprendizaje facilitarían el logro de los Objetivos de Aprendizaje por parte de todas las estudiantes y todos los estudiantes.
- Promover escenarios de metacognición en que los y las estudiantes identifiquen sus fortalezas y desafíos de aprendizaje, e identifiquen estrategias que les permitan fortalecer sus conocimientos, habilidades y actitudes en la asignatura.
- Procurar escenarios de andamiaje cognitivo, individuales y colaborativos, en los cuales se establezcan permanentemente conexiones con los aprendizajes previos de las y los estudiantes.
- Relevar relaciones entre la asignatura y otras áreas del currículum para suscitar una integración interdisciplinar que favorezca la construcción de un aprendizaje más sólido y profundo.

Se sugiere que la forma de plantear la planificación incorpore alguna(s) de las escalas temporales que se describen a continuación:

- Planificación anual.
- Planificación de unidad.
- Planificación de clases.

1 Es preciso recordar que, si bien los Objetivos de Aprendizaje consignados en las Bases Curriculares de cada asignatura y en sus correspondientes Programas de Estudio son prescriptivos, su secuencia y organización pueden ser modificadas para fortalecer con ello la pertinencia de la propuesta curricular para cada realidad escolar.

2 Idealmente, exigiendo la aplicación de lo que han aprendido en situaciones o contextos nuevos, de modo de fomentar la capacidad de aplicar los aprendizajes.

Se recomienda que tanto el formato como la temporalidad de la planificación sea una decisión curricular asumida por la comunidad educativa y fundada en los contextos institucionales específicos y en los diagnósticos de las características, intereses, niveles de aprendizaje y necesidades de los y las estudiantes. En este sentido, el Ministerio de Educación no ha definido como obligatoria ninguna de las escalas temporales presentadas.

	PLANIFICACIÓN ANUAL	PLANIFICACIÓN DE UNIDAD	PLANIFICACIÓN DE CLASES
OBJETIVO	› Formular la estructura curricular del año de manera realista y ajustada al tiempo disponible.	› Establecer una propuesta de trabajo de cada unidad, incluyendo evidencia evaluativa y experiencias de aprendizaje, que organice su desarrollo en el tiempo definido (de ser necesario, se sugiere subdividir la propuesta por mes o semana).	› Definir las actividades que se desarrollarán (pueden ser las sugeridas en el Programa de Estudio u otras creadas por las y los docentes), resguardando el logro de los Objetivos de Aprendizaje.
ESTRATEGIAS SUGERIDAS	› Verificar los días del año y las horas de clase por semana para estimar el tiempo total disponible. › Elaborar una propuesta de organización de los Objetivos de Aprendizaje para el año completo, considerando los días efectivos de trabajo escolar. › Identificar, en términos generales, el tipo de actividades y evaluaciones que se requerirán para fortalecer el logro de los aprendizajes. › Ajustar permanentemente la calendarización o las actividades planificadas, de acuerdo a las necesidades de las y los estudiantes y los posibles imprevistos suscitados.	› Organizar los Objetivos de Aprendizaje por periodo (por ejemplo, puede ser semanal o quincenal). › Proponer una estrategia de diagnóstico de conocimientos previos. › Establecer las actividades de aprendizaje que se llevarán a cabo para que los y las estudiantes logren los aprendizajes. › Generar un sistema de evaluaciones sumativas y formativas, y las instancias de retroalimentación.	› Desglosar los Objetivos de Aprendizaje en aprendizajes específicos por trabajar. › Definir las situaciones pedagógicas o actividades necesarias para lograr esos aprendizajes y las evidencias que se levantarán para evaluar el logro de estos, además de preguntas o problemas desafiantes para las y los estudiantes. › Integrar recursos y estrategias pedagógicas variadas. › Considerar la diversidad de estudiantes en el aula, proponiendo oportunidades de aprendizaje flexibles y variadas. › Considerar un tiempo para que los y las estudiantes compartan una reflexión final sobre lo aprendido, su aplicación, relevancia y su proyección a situaciones nuevas.

Orientaciones para evaluar los aprendizajes

La evaluación forma parte constitutiva del proceso de enseñanza y aprendizaje. Cumple un rol central en la promoción, la retroalimentación y el logro de los aprendizajes. Para que esta función se cumpla, la evaluación debe tener como propósitos:

- Dar cuenta de manera variada, precisa y comprensible del logro de los aprendizajes.
- Ser una herramienta que permita la autorregulación de la o el estudiante, es decir, que favorezca su comprensión del nivel de desarrollo de sus aprendizajes y de los desafíos que debe asumir para mejorarlos.
- Proporcionar a la o el docente información sobre los logros de aprendizaje de sus estudiantes que le permita analizar la efectividad de sus prácticas y propuestas y ajustarlas al grado de avance real de sus alumnos y alumnas.

¿CÓMO PROMOVER EL APRENDIZAJE POR MEDIO DE LA EVALUACIÓN?

Se deben considerar los siguientes aspectos para que la evaluación sea un medio adecuado para promover el aprendizaje:

- Dar a conocer los criterios de evaluación a las y los estudiantes antes de la evaluación. Una alternativa para asegurar que realmente comprendan estos criterios es analizar ejemplos de trabajos previos que reflejen mayor y menor logro, para mostrarles los aspectos centrales del aprendizaje que deben desarrollar y cómo puede observarse mayor o menor logro.
- Retroalimentar las actividades evaluativas, de modo que las alumnas y los alumnos tengan información certera y oportuna acerca de su desempeño, y así poder orientar y mejorar sus aprendizajes.
- Realizar un análisis de los resultados generados por las evaluaciones tanto a nivel global (por grupo curso) como a nivel particular (por estudiante). Se aconseja que este análisis sistematice la información organizándola por objetivo, eje, ámbito, habilidades u otro componente evaluado, de modo de definir los ajustes pedagógicos y apoyos necesarios de realizar.
- Considerar la diversidad de formas de aprender de los y las estudiantes, por lo que se sugiere incluir estímulos y recursos de distinto tipo, tales como visuales, auditivos u otros.

› Utilizar diferentes métodos de evaluación, dependiendo del objetivo que se evaluará y el propósito de la evaluación. Para esto se sugiere utilizar una variedad de medios y evidencias, como actividades de aplicación/desempeño, portafolios, registros anecdóticos, proyectos de investigación (grupales e individuales), informes, presentaciones y pruebas (orales y escritas), entre otros.

En la medida en que las y los docentes orienten a sus estudiantes y les den espacios para la autoevaluación y la reflexión, los alumnos y las alumnas podrán hacer un balance de sus aprendizajes y asumir la responsabilidad de su propio proceso formativo.

¿CÓMO DISEÑAR E IMPLEMENTAR LA EVALUACIÓN?

La evaluación juega un importante rol en motivar a las y los estudiantes a aprender. La pregunta clave que ayuda a definir las actividades de evaluación es: ¿Qué evidencia demostrará que el alumno o la alumna realmente logró el Objetivo de Aprendizaje? Así, es importante diseñar las evaluaciones de una unidad de aprendizaje a partir de los Objetivos de Aprendizaje planificados, resguardando que haya suficientes instancias de práctica y apoyo a los y las estudiantes para lograrlos. Para cumplir con este propósito, se recomienda diseñar las evaluaciones al momento de planificar considerando para ello las siguientes acciones:

1. Identificar el(los) Objetivo(s) de Aprendizaje de la unidad de aprendizaje y los Indicadores de Evaluación correspondientes. Estos ayudarán a visualizar los desempeños que demuestran que los y las estudiantes han logrado dicho(s) Objetivo(s).
2. Reflexionar sobre cuál(es) sería(n) la(s) manera(s) más fidedigna(s) de evidenciar que las alumnas y los alumnos lograron aprender lo que se espera, es decir, qué desempeños o actividades permitirán a los y las estudiantes aplicar lo aprendido en problemas, situaciones o contextos nuevos, manifestando, así, un aprendizaje profundo. A partir de esta reflexión, es importante establecer la actividad de evaluación principal, que servirá de “ancla” o “meta” de la unidad, y los criterios de evaluación que se utilizarán para juzgarla, junto con las pautas de corrección o rúbricas correspondientes. Las evaluaciones señalan a los y las estudiantes lo que es relevante de ser aprendido en la

unidad y modelan lo que se espera de ellos y ellas. Por esto, es importante que las actividades evaluativas centrales de las unidades requieran que las y los estudiantes pongan en acción lo aprendido en un contexto complejo, idealmente de la vida real, de modo de fomentar el desarrollo de la capacidad de transferir los aprendizajes a situaciones auténticas que visibilicen su relevancia y aplicabilidad para la vida, más allá de la escuela o liceo.

3. Definir actividades de evaluación complementarias (por ejemplo, análisis de casos cortos, ensayos breves, pruebas, controles, etc.) que permitan ir evaluando el logro de ciertos aprendizajes más específicos o concretos que son precondición para lograr un desempeño más complejo a partir de ellos (el que se evidenciaría en la actividad de evaluación principal).
4. Al momento de generar el plan de experiencias de aprendizaje de la unidad, definir las actividades de evaluación diagnóstica que permitan evidenciar las concepciones, creencias, experiencias, conocimientos, habilidades y/o actitudes que las y los estudiantes tienen respecto de lo que se trabajará en dicho periodo, y así brindar información para ajustar las actividades de aprendizaje planificadas.
5. Identificar los momentos o hitos en el transcurso de las actividades de aprendizaje planeadas en que será importante diseñar actividades de evaluación formativa, más o menos formales, con el objeto de monitorear de forma permanente el avance en el aprendizaje de todos y todas. La información que estas generen permitirá retroalimentar, por una parte, a los y las estudiantes sobre sus aprendizajes y cómo seguir avanzando y, por otra, a la o el docente respecto de cuán efectivas han sido las oportunidades de aprendizaje que ha diseñado, de modo de hacer ajustes a lo planificado según las evidencias entregadas por estas evaluaciones. Para que las actividades de evaluación formativa sean realmente útiles desde un punto de vista pedagógico, deben considerar instancias posteriores de aprendizaje para que las y los estudiantes puedan seguir trabajando, afinando y avanzando en lo que fue evaluado. Finalmente, es necesario procurar que las actividades de aprendizaje realizadas en clases sean coherentes con el objetivo y la forma de evidenciar su logro o evaluación.
6. Informar con precisión a las alumnas y los alumnos, antes de implementar la evaluación, sobre las actividades de evaluación que se llevarán a cabo para evidenciar el logro de los Objetivos de la unidad y los criterios con los que se juzgará su trabajo. Para asegurar que los y las estudiantes realmente comprenden qué es lo que se espera de ellos y ellas, se puede trabajar basándose en ejemplos o modelos de los niveles deseados de rendimiento, y comparar modelos o ejemplos de alta calidad con otros de menor calidad.

7. Planificar un tiempo razonable para comunicar los resultados de la evaluación a las y los estudiantes. Esta instancia debe realizarse en un clima adecuado para estimularlas y estimularlos a identificar sus errores y/o debilidades, y considerarlos como una oportunidad de aprendizaje.

Es fundamental para el aprendizaje que el o la docente asuma el proceso evaluativo con una perspectiva de mejora continua y que, de esta manera, tome decisiones respecto a su planificación inicial de acuerdo con la información y el análisis de resultados realizado. En este contexto, el proceso evaluativo debiese alimentar la gestión curricular y pedagógica de la o el docente y así mejorar sus prácticas formativas, tanto a nivel individual como por departamento o área.

Estructura del Programa de Estudio

PÁGINA RESUMEN

UNIDAD 1

Propósito:

Párrafo breve que resume el objetivo formativo de la unidad. Se detalla qué se espera que el o la estudiante aprenda en la unidad, vinculando los contenidos, las habilidades y las actitudes de forma integrada.

PROPÓSITO

En esta unidad se profundiza el concepto de raíz, para que las y los estudiantes comprendan el proceso que involucran sus operaciones, estableciendo su relación y extensión con las propiedades de potencias de exponente racional, y explicando sus soluciones y los algoritmos utilizados. Mediante la ejercitación, se busca que entiendan los procesos y su respectivo orden.

Asimismo, las alumnas y los alumnos amplían sus conocimientos sobre potencias, los relacionan con raíces y analizan el proceso inverso. Establecen la relación que existe entre potencias, raíces y logaritmos, mediante representaciones simbólicas y pictóricas, por medio de gráficos o metáforas. Se espera que aprendan a aplicar el concepto de potencias, raíces o logaritmos para resolver problemas rutinarios o no rutinarios en diferentes contextos, y modelar situaciones utilizando el concepto de potencia o raíz. Se pretende también que sean capaces de representar y analizar problemas que se pueden resolver mediante las operaciones de logaritmos, y establecer restricciones según la naturaleza del problema. [...]

Conocimientos previos:

Lista ordenada de conceptos, habilidades y actitudes que el o la estudiante debe manejar antes de iniciar la unidad.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Potencia de base racional y exponente entero.
- Raíz cuadrada.
- Área de una circunferencia.
- Volumen de cilindro y cono.
- Teorema de Pitágoras.

PALABRAS CLAVE

Base, exponente, raíces, logaritmos, estimación, equidistante, área de la esfera, volumen de la esfera.

CONOCIMIENTOS

- Potencias con exponente racional.
- Raíces.
- Logaritmos.
- Volumen de esfera.

HABILIDADES

- Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes:
  - Simplificar el problema y estimar el resultado.
  - Descomponer el problema en subproblemas más sencillos.
  - Buscar patrones.
  - Usar herramientas computacionales. **(OA a)**
- Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático. **(OA b)** [...]

ACTITUDES

- Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales. **(OA C)**
- Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas. **(OA D)**

Palabras clave:

Vocabulario esencial que la o el estudiante debe aprender en la unidad.

Conocimientos, habilidades y actitudes:

Lista de los conocimientos, las habilidades y las actitudes por desarrollar en la unidad.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE E INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

Objetivos de Aprendizaje:

Son los Objetivos de Aprendizaje de las Bases Curriculares que definen los aprendizajes terminales del año para cada asignatura. Se refieren a conocimientos, habilidades y actitudes que buscan favorecer la formación integral de los y las estudiantes. En cada unidad se explicitan los Objetivos de Aprendizaje a trabajar.

Indicadores de Evaluación:

Los Indicadores de Evaluación detallan un desempeño observable (y, por lo tanto, evaluable) de la o el estudiante en relación con el Objetivo de Aprendizaje al cual están asociados. Son de carácter sugerido, por lo que el o la docente puede modificarlos o complementarlos. Cada Objetivo de Aprendizaje cuenta con varios Indicadores, dado que existen múltiples desempeños que pueden demostrar que un aprendizaje ha sido desarrollado.

UNIDAD 1	
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	INDICADORES DE EVALUACIÓN
Se espera que las y los estudiantes sean capaces de:	Los y las estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA 1 Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales: • Utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces. • Combinando raíces con números racionales. • Resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos.	• Reconocen números cuyo desarrollo decimal es infinito y no tiene periodo. • Estiman y aproximan números irracionales. • Reconocen que los números irracionales no pueden escribirse como un cociente entre números enteros. • Operan con números racionales e irracionales. • Utilizan la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces. • Representan números irracionales como puntos sobre la recta real. • Determinan la existencia de raíces de manera concreta, pictórica y simbólica. • Resuelven problemas que involucren raíces en diferentes contextos.
OA 2 Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos: • Comparando representaciones de potencias de exponente racional con raíces enésimas en la recta numérica. • Convirtiendo raíces enésimas a potencias de exponente racional y viceversa. • Describiendo la relación entre potencias y logaritmos. • Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que involucren potencias, logaritmos y raíces enésimas.	• Relacionan y caracterizan las raíces por medio de potencias de exponente racional. • Derivan y determinan propiedades relativas a multiplicaciones y divisiones con raíces. • Resuelven problemas que involucren raíces y números racionales. • Establecen relaciones entre potencias, raíces y logaritmos. • Comparan representaciones de potencias con exponente racional, con raíces enésimas, y las representan en la recta numérica. • Explican la relación entre potencias y logaritmos. • Convierten desde un tipo de registro a otro; es decir, desde potencias a raíces y viceversa, y desde potencias a logaritmos y viceversa. • Resuelven problemas rutinarios y no rutinarios que involucran logaritmos.

UNIDAD 1	
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	INDICADORES DE EVALUACIÓN
Se espera que las y los estudiantes sean capaces de:	Los y las estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA 7 Desarrollar las fórmulas del área de la superficie y el volumen de la esfera: • Conjeturando la fórmula. • Representando de manera concreta y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo. • Resolviendo problemas de la vida diaria y de geometría.	• Relacionan medidas de contenidos en envases en forma de cono, cilindro y esfera, que tienen el mismo radio y cuya altura también es igual al radio. • Derivan la fórmula del volumen de una esfera, a partir de los datos obtenidos en la comparación. • Reconocen que el volumen del cono es un cuarto del volumen de la esfera, si el radio y la altura son iguales en ambas figuras 3D. • Determinan la relación entre el volumen de la esfera y el volumen de un cono inscrito en ella. • Relacionan la esfera con objetos cotidianos (balón de fútbol, pelota de tenis, etc.).

SUGERENCIAS DE ACTIVIDADES

Objetivos de Aprendizaje:

Son los OA especificados en las Bases Curriculares. En ocasiones, un OA puede ser abordado por un conjunto de actividades, así como una actividad puede corresponder a más de un OA.

Actividades:

Corresponden a la propuesta metodológica que ayuda a la o el docente a favorecer el logro de los Objetivos de Aprendizaje. Estas actividades pueden ser complementadas con el texto de estudio u otros recursos, o ser una guía para que el profesor o la profesora diseñe sus propias actividades.

Observaciones al docente:

Son sugerencias para la mejor implementación de la actividad. Generalmente están referidas a estrategias didácticas, fuentes y recursos (libros, sitios web, películas, entre otros) o alternativas de profundización del aprendizaje abordado.

® Relación con otras asignaturas:

Indica que la actividad se relaciona con Objetivos de Aprendizaje de otras asignaturas, en sus respectivos niveles.

Objetivos de Aprendizaje

OA 6

Explicar el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo:

› Por medio de situaciones de la vida real y de otras asignaturas.

› Identificándolo con el interés compuesto.

› Representándolo de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo.

› Expresándolo en forma recursiva $f(t + 1) - f(t) = a \cdot f(t)$.

› Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

1. El café caliente se enfría lentamente en una taza. Se estima que la disminución de la temperatura del café depende de la diferencia entre esa temperatura y la del entorno. La ecuación recursiva es la siguiente: $x(t + 1) - x(t) = p \cdot [x(t) - X_A]$, en la cual la variable p es el porcentaje de disminución por intervalo de tiempo, y la variable X_A representa la temperatura del entorno, que se considera constante.
   - El café tiene una temperatura inicial de 70° C y la temperatura del entorno es de 20° C. Después de 10 minutos, la temperatura del café es de 64° C. Determinan el porcentaje p de la disminución de la temperatura en intervalos de 10 minutos.
   - Calculan sucesivamente, en pasos de 10 minutos, la temperatura para la próxima media hora.
   - ¿En qué intervalo de tiempo pasa la temperatura del café a la mitad de la temperatura inicial?

Modelar

Identificar si un cambio es cuadrático o porcentual constante y seleccionar el modelo adecuado. (OA i)

Observaciones a la o el docente

Las siguientes actividades pueden trabajarse en pares o en grupos. Es posible que los y las estudiantes consideren ejemplos particulares para cada proposición, y que esto genere algún tipo de discusión, la que se debe desarrollar con respeto y considerando las diferencias. Se sugiere que practiquen formas de una buena convivencia. (OA D)

® **Ciencias Naturales OA 11 de 8° básico.**

SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN

EVALUACIÓN 1

Objetivo de Aprendizaje

OA 1

Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales:

- **Utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces.**
- **Combinando raíces con números racionales.**
- **Resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos.**

Indicadores de Evaluación

- Reconocen números cuyo desarrollo decimal es infinito y no tiene periodo.
- Estiman y aproximan números irracionales.
- Reconocen que los números irracionales no pueden escribirse como un cociente entre números enteros.
- Operan con números racionales e irracionales.
- Representan números irracionales como puntos sobre la recta real.
- Determinan la existencia de raíces de manera concreta y pictórica.
- Resuelven problemas de la vida real.

Sugerencias de evaluación:

Esta sección incluye actividades de evaluación para los OA considerados en la unidad. El propósito es que la actividad diseñada sirva como ejemplo, de forma que la o el docente pueda utilizarla como referente para la elaboración de su propia propuesta pedagógica. En este sentido, no buscan ser exhaustivas en variedad, cantidad ni forma. Los ejemplos de evaluación pueden ir acompañados de **criterios de evaluación** que definan más específicamente los logros de aprendizaje.

Objetivos de Aprendizaje:

Son los OA especificados en las Bases Curriculares. En ocasiones, un OA puede ser evaluado por un conjunto de sugerencias de evaluación o una misma evaluación puede articularse con más de un OA.

Indicadores de Evaluación:

Son desempeños o acciones específicas observables en la o el estudiante que entregan evidencia del logro de un conocimiento, habilidad o actitud.

EVALUACIÓN 1

ACTIVIDAD	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
En parejas, construyen un número que no es fracción y que no es periódico. Continúan la siguiente secuencia: • Consideran que el área se debe mantener. • Completan la secuencia con, al menos, dos rectángulos más. • Conjeturan sobre la relación entre el área del rectángulo y la medida de los lados del rectángulo que sigue en esta secuencia. Comprueban con la calculadora y argumentan geométricamente. Resuelven el siguiente problema: El rollo de papel higiénico está presente en todos los baños y transportar una gran cantidad es un tema muy importante para las compañías que lo fabrican. • Calculan el volumen de un rollo de papel higiénico de manera aproximada. • Determinan el volumen de un millón de rollos de papel higiénico, de manera aproximada. • Responden cuáles serían las medidas ideales de una caja (en forma de paralelepípedo o cubo) para transportar un millón de rollos. • Comentan en el curso sobre la cantidad de rollos de papel higiénico que necesita la ciudad en la que viven y la mejor forma de transportarla de una sola vez.	• Utilizan los conocimientos de construcción geométrica para construir un número irracional. • Representan números irracionales sobre la recta numérica. • Reconocen que el número 2,5 se obtiene al dividir la adición de los lados por 2. • Reconocen que el número 2,4 se obtiene para conservar el área del rectángulo. • Determinan los siguientes rectángulos respetando las reglas antes observadas. • Comprueban con la calculadora sus resultados y conjeturas. • Conjeturan sobre el cálculo de la raíz cuadrada de 6. • Argumentan geométricamente sobre el cálculo de la raíz de 6, utilizando la secuencia y prediciendo sobre la medida de los lados de un cuadrado. • Modelan situaciones sobre el transporte de los rollos de papel higiénico. • Utilizan la fórmula del volumen de un cilindro para determinar el volumen de un rollo de papel. • Determinan medidas ideales y reales de una caja en forma de paralelepípedo, que permita transportar cierta cantidad de rollos de papel higiénico.

Matemática

Matemática

INTRODUCCIÓN

Comprender las matemáticas y ser capaz de aplicar sus conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales es fundamental para las y los ciudadanos en el mundo moderno. Para resolver e interpretar una cantidad cada vez mayor de problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos, se requiere de un cierto nivel de comprensión de las matemáticas, de razonamiento matemático y del uso de herramientas matemáticas. La formación matemática y la alfabetización en esta materia, de todos los ciudadanos y ciudadanas, se consideran elemento esencial a tener en cuenta para el desarrollo de cualquier país. Se conoce como alfabetización matemática la capacidad de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar en forma adecuada tanto los conocimientos como las herramientas de la disciplina para resolver problemas cotidianos.

El conocimiento matemático y la capacidad para usarlo tienen profundas e importantes consecuencias en la formación de las personas. Aprender matemática influye en el concepto que niños y niñas, jóvenes y adultos construyen sobre sí mismos y sus capacidades, en parte porque el entorno social lo valora y lo asocia a logros, beneficios y capacidades de orden superior, pero sobre todo porque faculta para confiar en el propio razonamiento y para usar de forma efectiva diversas estrategias para resolver problemas significativos relacionados con su vida. Así, el proceso de aprender matemática ayuda a que la persona se asuma como un ser autónomo y valioso en la sociedad. En consecuencia, se trata de un conocimiento cuya calidad, pertinencia y amplitud afecta la calidad de vida de las personas y sus posibilidades de actuar en el mundo.

La matemática es una herramienta fundamental que explica la mayoría de los avances de nuestra sociedad y les sirve de soporte científico. Sus aportes están en la base de la innovación en tecnología, ciencia, transporte, comunicaciones y se aplican en otras áreas, como las artes, la geografía y la economía. Tradicionalmente, el aprendizaje de esta disciplina se ha asociado solo con asimilar fórmulas, procedimientos y símbolos; sin embargo, la matemática es dinámica, creativa, utiliza un lenguaje universal y se ha desarrollado como medio para aprender a pensar y para resolver problemas. Por otra parte, se suele hacer referencia a ella como un espacio de certeza y de estabilidad (como ocurre en el álgebra o la geometría), pero también propone explicaciones a fenómenos inciertos de la vida cotidiana, por lo que el pensamiento estadístico y probabilístico son componentes destacados de la matemática. Así, es capaz de explicar los patrones y las irregularidades, la continuidad y el cambio.

La formación matemática ofrece también la posibilidad de trabajar con entes abstractos y sus interrelaciones, preparando a las y los estudiantes para la comprensión del medio en que se desenvuelven; un medio en que la cultura, la tecnología y las ciencias se están redefiniendo y haciendo más complejas permanentemente. Esto queda de manifiesto en la cantidad de información que contiene datos e ideas abstractas acerca de temas económicos, técnicos y científicos, entre otros. Estas Bases proponen formar

a un o una estudiante que perciba la matemática en su entorno y que se valga de los conocimientos adquiridos para describir y analizar el mundo con el fin de desenvolverse efectivamente en él. Se procura que la asignatura lo faculte para integrar el conocimiento matemático con otros tipos de conocimientos, de modo de poder sacar conclusiones y enfrentar situaciones cotidianas de diferente complejidad. En síntesis, la matemática entrega herramientas únicas y poderosas para entender el mundo.

En esa perspectiva, es indispensable que las y los estudiantes adquieran una sólida comprensión de los conceptos matemáticos fundamentales, como los números enteros, las potencias y raíces, porcentajes, funciones, ecuaciones e inecuaciones, homotecia, muestreo y azar, y muestren esa comprensión por medio de la representación, la operatoria, la explicación, la relación y la aplicación de dichos conceptos. De este modo, se espera que adquieran la capacidad de emplear e interpretar las matemáticas en diversos contextos. Esto implica que deben aprender a aplicar el razonamiento matemático y a utilizar conceptos, procedimientos, datos y herramientas para entender, describir, explicar y predecir fenómenos. De esta forma, podrán reconocer el papel que juega esta disciplina en el mundo, formular juicios bien fundados y tomar decisiones necesarias y constructivas.

Para lograrlo, es necesario que desarrollen el **pensamiento matemático**, uno de los principales focos a los cuales se orienta el currículum de esta asignatura. Esto implica formar a estudiantes que perciban la matemática en su entorno y que se valgan de los conocimientos adquiridos como una herramienta útil para describir el mundo y para manejarse efectivamente en él; que reconozcan las aplicaciones de la matemática en diversos ámbitos y que la usen para comprender situaciones y resolver problemas. El pensamiento matemático se define como una capacidad que nos permite comprender las relaciones del entorno, cuantificarlas, razonar sobre ellas, representarlas y comunicarlas. En este sentido, el papel de la enseñanza de la disciplina es desarrollar las habilidades que generan el pensamiento matemático, sus conceptos y procedimientos básicos, con el fin de comprender y producir información representada en términos matemáticos. Se pretende que las y los estudiantes desarrollen el razonamiento lógico, que implica seleccionar, ordenar y clasificar consistentemente de acuerdo a criterios bien definidos, así como seguir reglas e inferir resultados. En este ciclo, se pretende además que avancen progresivamente hacia el trabajo deductivo y el pensamiento abstracto, dándole sentido a sus experiencias a partir de premisas o símbolos matemáticos.

La asignatura se focaliza en la **resolución de problemas**. Resolver un problema implica no solo poner en juego un amplio conjunto de habilidades, sino también la creatividad para buscar y probar diversas soluciones. Al poner el énfasis en la resolución de problemas, se busca, por un lado, que los y las estudiantes descubran la utilidad de las matemáticas en la vida real y, por otro, abrir espacios para conectar esta disciplina con otras asignaturas. En este contexto, muchas veces lo que más aporta al aprendizaje no es la solución a un problema matemático específico, sino el proceso de búsqueda creativa de soluciones en cualquier área del conocimiento.

Otro de los énfasis del currículum de Matemática busca que las y los estudiantes sean capaces de transitar entre los distintos niveles de **representación** (concreto, pictórico y simbólico), traduciendo situaciones de la vida cotidiana a lenguaje formal o utilizando símbolos matemáticos para resolver problemas o explicar situaciones concretas. Así se logra que las expresiones matemáticas adquieran un sentido próximo para las alumnas y los alumnos.

Las Bases Curriculares dan relevancia al **modelamiento matemático**. El objetivo de desarrollar esta habilidad es lograr que el o la estudiante construya una versión simplificada y abstracta de los sistemas que operan en la realidad, que capture los patrones clave y los exprese mediante símbolos matemáticos.

Asimismo, las **habilidades comunicativas y argumentativas** son centrales. Las primeras se relacionan con la capacidad de expresar ideas con claridad y son muy importantes para comprender el razonamiento que hay detrás de cada problema resuelto o concepto comprendido. Las segundas permiten desarrollar una actitud reflexiva y abierta al debate de sus fundamentos. Por otro lado, las ases de la asignatura promueven **el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC),** fundamentalmente como un apoyo para la comprensión del conocimiento matemático, para manipular representaciones de funciones y de objetos geométricos, o bien para organizar la información y comunicar resultados. La asignatura se orienta a la comprensión de las distintas operaciones matemáticas; por lo tanto, el uso de las TIC como herramienta debe reservarse para las comprobaciones rápidas de cálculos, y para efectuar una gran cantidad de operaciones, o para realizar operaciones con números muy grandes. Es necesario que las y los estudiantes comprendan y apliquen los conceptos y las operaciones involucradas antes de usar estos medios.

Considerando que el proceso de aprendizaje que proponen estos programas para la asignatura de Matemática relaciona constantemente las experiencias de los alumnos y las alumnas con el conocimiento matemático, se espera que ellos y ellas desarrollen una inclinación favorable hacia la disciplina. Especialmente en relación con los injustificados resultados inferiores de las mujeres en la asignatura[3], se pretende que las estudiantes adquieran mayor confianza y empatía respecto del aprendizaje de la disciplina, y se busca estimular su participación en la clase de Matemática en condiciones de igualdad.

ORGANIZACIÓN CURRICULAR

HABILIDADES

En este ciclo se desarrollan cuatro habilidades (resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar) que se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos, y en la aplicación de conocimientos en contextos diversos.

Resolver problemas

Aprender a resolver problemas es tanto un medio como un fin en la adquisición de una buena educación matemática. Se habla de resolver problemas (en lugar de ejercicios) cuando la o el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento determinado. Para ello las y los estudiantes necesitan usar estrategias, comprobar y comunicar: experimentar, escoger, inventar y aplicar diferentes estrategias (ensayo y error, metáforas o algún tipo de representación, modelar, realizar simulaciones, efectuar transferencias desde problemas similares ya resueltos, descomposición, etc.); comparar

3 Agencia de Calidad de la Educación, Chile. (2011). *Resultados TIMSS 2011 Chile: Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias*. Santiago de Chile. Chile, Ministerio de Educación SIMCE – Unidad de Currículum y Evaluación (2009). *Resumen de resultados PISA 2009, Chile*. Recuperado de http://www.agenciaeducacion.cl/wp-content/files_mf/resumenderesultadospisa2009chile.pdf

diferentes vías de solución y evaluar las respuestas obtenidas y su pertinencia. De este modo, se fomenta el pensamiento reflexivo, crítico y creativo.

Cabe destacar que la importancia de la habilidad de resolver problemas debe ser desarrollada y aplicada frecuentemente en problemas rutinarios y no rutinarios. También es importante que los y las estudiantes desarrollen la capacidad de plantearse problemas y de hacer preguntas. Esto lleva a comprender la clase como un lugar donde se entrelazan la creatividad y la curiosidad, donde se pueden formular nuevas preguntas y generar situaciones de interés personal en el marco de proyectos. Específicamente, se espera que logren plantearse nuevos problemas y resolverlos, utilizando conocimientos previos e investigando sobre lo que desconocen para llegar a la resolución.

Representar

Para trabajar en matemáticas de manera precisa se requiere conocer un lenguaje simbólico (abstracto). En estos programas, al igual que en los de Educación Básica, se propone transitar fluidamente desde la representación concreta hacia la pictórica, para avanzar progresivamente hacia el lenguaje simbólico. Las metáforas, las representaciones y las analogías juegan un rol clave en este proceso y permiten que las y los estudiantes construyan sus propios conceptos matemáticos. Representar tiene grandes ventajas para el aprendizaje; entre ellas, permite relacionar el conocimiento intuitivo con una explicación formal de las situaciones, ligando diferentes niveles de representación (concreto, pictórico y simbólico); potencia la comprensión, memorización y explicación de las operaciones, relaciones y conceptos matemáticos, y brinda un significado cercano a las expresiones matemáticas.

Así, la matemática se vuelve accesible para todos, se hace cercana a la vida y a la experiencia de cada uno y cada una, se amplía el número de estudiantes que se interesan por aprenderla y lo hacen con una adecuada profundidad.

En este ciclo se desarrollan conocimientos por medio del "aprender haciendo" en situaciones concretas, traduciéndolas a un nivel gráfico y utilizando símbolos matemáticos; de esa manera se logra un aprendizaje significativo y se desarrolla la capacidad de pensar matemáticamente. Específicamente, se espera que las y los estudiantes extraigan información desde el entorno y elijan distintas formas de expresar esos datos (tablas, gráficos, diagramas, metáforas, símbolos matemáticos, etc.) según las necesidades de la actividad o la situación; que usen e interpreten representaciones concretas, pictóricas o simbólicas para resolver problemas, y que identifiquen la validez y las limitaciones de esas representaciones según el contexto.

Modelar

En los presentes programas, se considera que modelar es una habilidad que permite resolver problemas reales mediante la construcción de modelos, que pueden ser físicos, computacionales o simbólicos, y que sirven para poner a prueba el objeto real y ver cómo responde frente a diferentes factores o variantes.

El modelo construido debe capturar parte de las características de una realidad dinámica para poder estudiarla, modificarla o evaluarla. Asimismo, permite buscar soluciones, aplicarlas a otras realidades (objetos, fenómenos, situaciones, etc.), estimar, comparar impactos y representar relaciones. Así, los y las estudiantes aprenden a usar variadas formas para representar datos, y a seleccionar y aplicar los métodos matemáticos apropiados y las herramientas adecuadas para resolver problemas. Las ecuaciones, las funciones y la geometría cobran un sentido significativo para ellos y ellas. Es decir, se pretende que, por medio del modelamiento matemático, los estudiantes apliquen métodos matemáticos y herramientas apropiadas para resolver problemas del mundo real.

Al construir modelos, las y los estudiantes descubren regularidades o patrones y son capaces de expresar esas características fluidamente, ya sea con sus propias palabras o con un lenguaje más formal; además, desarrollan la creatividad y la capacidad de razonamiento y de resolución de problemas, y encuentran soluciones que pueden transferir a otros contextos. Se espera que, en este ciclo:

- Usen modelos, comprendan y apliquen correctamente las reglas que los definen.
- Seleccionen modelos comparándolos según su capacidad de capturar fenómenos de la realidad.
- Ajusten modelos cambiando sus parámetros o considerando buenos parámetros de un modelo dado.

La capacidad de modelar se puede aplicar en diversos ámbitos y contextos que involucren operaciones matemáticas con números reales o con expresiones algebraicas, análisis de datos, probabilidad de ocurrencia de eventos y sistemas geométricos.

Por otro lado, usar metáforas de experiencias cercanas ayuda a los y las estudiantes a comprender conocimientos matemáticos; por ejemplo, explicar las funciones como una máquina que transforma los números, u ordenar los números en una recta y explicar la adición como pasos hacia la derecha de esa recta. En el uso de metáforas se reconocen tres ventajas para el aprendizaje: relacionar experiencias personales con el conocimiento formal; potenciar la comprensión, memorización y explicación de conceptos matemáticos; y brindar a las expresiones matemáticas un significado cercano.

Argumentar y comunicar

La habilidad de comunicar se desarrolla principalmente cuando el o la estudiante tiene la oportunidad de expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que incluyen desde explicar las propiedades básicas de los objetos familiares, los cálculos, procedimientos y resultados de más de una manera, hasta explicar los patrones y tendencias de los datos, las ideas y las relaciones más complejas, entre ellas, las relaciones lógicas.

Reflexionar sobre los procedimientos, propios o de otros, comparar o sostener intercambios sobre situaciones matemáticas problemáticas, optimiza el proceso de aprendizaje. Los verbos conjeturar, describir, fundamentar y verificar caracterizan las actividades matemáticas básicas y se deben utilizar a diario en clases de Matemática. Lo anterior prepara el camino para las argumentaciones complejas que se deben realizar en este ciclo. Se apunta principalmente a que los y las estudiantes sepan diferenciar entre una argumentación intuitiva y una argumentación matemática; a que sean capaces de interpretar y comprender cadenas de implicaciones lógicas y puedan convencer a otros y otras de que la propuesta es válida matemáticamente y aceptada por todos y todas. De esta manera, serán capaces de efectuar demostraciones matemáticas de proposiciones, en un lenguaje matemático, apoyadas por medio de representaciones pictóricas y con explicaciones en lenguaje cotidiano.

Para lograrlo, es importante que el o la docente les otorgue la oportunidad de describir, explicar y discutir colectivamente sus soluciones, argumentos e inferencias, sobre diversos problemas, escuchándose y corrigiéndose mutuamente. Así aprenderán a generalizar conceptos y a utilizar un amplio abanico de formas para comunicar sus ideas, incluyendo analogías, metáforas y representaciones pictóricas o simbólicas.

EJES TEMÁTICOS

En este ciclo, los conocimientos se organizan en cuatro ejes temáticos: Números, Álgebra y funciones, Geometría, y Probabilidad y estadística. Cada una de las habilidades descritas anteriormente se puede desarrollar en cada uno de estos ejes.

A diferencia de años anteriores, no se incluye un eje de Medición, ya que los conceptos básicos de la medición han sido tratados en el ciclo anterior y, desde 7° básico a 2º medio, esos conocimientos son aplicados para resolver problemas en los cuatro ejes temáticos.

Números

En este eje, los y las estudiantes trabajan la comprensión de nuevos números y las operaciones entre estos. Progresan desde los números enteros hasta los números reales. En este camino, comprenden cómo los distintos tipos de números y sus reglas respecto de las operaciones básicas permiten modelar situaciones cotidianas más amplias. El trabajo con potencias comienza con la base diez (10) y su uso en la notación científica, para que puedan tratar el concepto de manera concreta, pictórica y simbólica. Se espera, además, que comprendan y manejen adecuadamente los porcentajes y las posibilidades de este concepto para modelar situaciones de otras áreas.

También trabajan las formas de representar estos "nuevos números", de relacionarlos y de utilizarlos para resolver problemas y para manejarse en la vida diaria. Un énfasis de este eje es representar dichos números en la recta numérica. Se espera que las y los estudiantes aprendan a aproximar, estimar y calcular con precisión, y que tengan una noción clara sobre la cantidad, la magnitud y la medida de objetos, utilizando estos números.

En cuanto al cálculo, este debe ser preciso en los algoritmos, pero siempre en un contexto real y adecuado a la realidad de las y los jóvenes; es decir, el cálculo debe orientarse a resolver problemas en forma contextualizada y real, más que a emplear los algoritmos sin sentido. Hay que fomentar y permitir el uso de la calculadora cuando ya han aprendido las operaciones elementales en un ámbito numérico limitado.

Por último, se espera que, al final de este ciclo, los y las estudiantes puedan transitar por las diferentes formas de representación de un número (concreta, pictórica y simbólica).

Álgebra y funciones

En este eje, las y los estudiantes comprenden la importancia del lenguaje algebraico para expresarse en matemática y las posibilidades que ese lenguaje les ofrece. Se espera que escriban, representen y usen expresiones algebraicas para designar números; que establezcan relaciones entre ellos mediante ecuaciones, inecuaciones o funciones, siempre orientadas a resolver problemas; que identifiquen regularidades que les permitan construir modelos y expresen dichas regularidades en lenguaje algebraico. Este eje pone especial énfasis en que los y las estudiantes aprendan a reconocer modelos y ampliarlos, y desarrollen la habilidad de comunicarse por medio de expresiones algebraicas.

Los aprendizajes en Álgebra y funciones se relacionan fuertemente con el eje Números; un trabajo adecuado en ambos ejes permitirá que los y las estudiantes comprendan y desarrollen conceptos nuevos cuando cursen niveles superiores, y fortalezcan aquellos aprendidos en el ciclo anterior. Se busca que, al final de este periodo, comprendan y manipulen expresiones algebraicas sencillas, y establezcan relaciones entre estas mediante ecuaciones o inecuaciones. Especialmente, se pretende que puedan utilizar las metáforas para interiorizarse en el concepto de función y cómo estas permitirán manipular modelar y encontrar soluciones a situaciones de cambios en diferentes ámbitos, como por ejemplo, el aumento de ventas en un tiempo determinado. Se espera que transformen expresiones algebraicas en otras equivalentes para resolver problemas

y que sean capaces de justificar su proceder; que expresen igualdades y desigualdades mediante ecuaciones e inecuaciones y que las apliquen para resolver problemas; que comprendan las funciones lineales, las funciones cuadráticas y sus respectivas representaciones, y que resuelvan problemas a partir de ellas.

Geometría

En este eje, los y las estudiantes desarrollan sus capacidades espaciales y la comprensión del espacio y sus formas. Para ello, comparan, miden y estiman magnitudes, y analizan propiedades y características de diferentes figuras geométricas de dos y tres dimensiones. En este eje, la habilidad de representar juega un rol especial. Las y los estudiantes deben describir posiciones y movimientos usando coordenadas y vectores, y obtener conclusiones respecto de las propiedades y las características de lugares geométricos, de polígonos y cuerpos conocidos, por medio de representaciones. De este modo, deben transitar desde un ámbito bidimensional a uno tridimensional, por medio de caras, bases, secciones, sombras y redes de puntos.

Sobre esta base, las y los estudiantes aprenden a calcular perímetros, áreas y volúmenes al resolver problemas técnicos y cotidianos. Al final de este ciclo, deberán ser capaces de apreciar y utilizar las propiedades y relaciones geométricas de manera adecuada y precisa, tendrán que ser competentes en mediciones geométricas y deberán relacionar la geometría con los números y el álgebra de manera armoniosa y concreta. Este eje presenta por primera vez las razones trigonométricas para que los y las estudiantes tengan más herramientas para resolver problemas. Más aun, propone que comprendan las representaciones de coordenadas en el plano cartesiano y usen destrezas de visualización espacial. En este proceso, deben ser capaces de usar diferentes instrumentos de medida para visualizar ciertas figuras 2D o 3D; se recomienda tanto las construcciones manuales como las tecnológicas.

Probabilidad y estadística

Este eje responde a la necesidad de que todas las estudiantes y todos los estudiantes aprendan a efectuar análisis e inferencias y obtener información a partir de datos estadísticos. Se espera formar personas con capacidad crítica, que puedan usar la información para validar sus opiniones y decisiones y que sepan determinar situaciones conflictivas surgidas de interpretaciones erróneas de un gráfico, y posibles manipulaciones de los datos.

En el área de la probabilidad, se busca que estimen de manera intuitiva y que calculen de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos; que determinen la probabilidad de ocurrencia de estos en forma experimental y teórica, y que construyan modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias. A su vez, en el área de la estadística, se espera que diseñen experimentos de muestreo aleatorio para inferir sobre características de poblaciones; que registren datos desagregados cada vez que tenga sentido; y utilicen medidas de tendencia central, de posición y de dispersión, para resolver problemas.

El enfoque de este eje radica en interpretar y visualizar datos estadísticos, en las medidas que permitan comparar características de poblaciones, y en hacer, simular y estudiar experimentos aleatorios sencillos para construir, a partir de ellos, la teoría y los modelos probabilísticos. En particular, al final de este ciclo, las y los podrán comprender el rol de la probabilidad en la sociedad, utilizando herramientas estadísticas y de la probabilidad misma.

ACTITUDES

Las Bases Curriculares de Matemática promueven un conjunto de actitudes que derivan de los objetivos de la Ley General de Educación y de los Objetivos de Aprendizaje Transversales (OAT). Estas actitudes se relacionan con la asignatura y se orientan al desarrollo social y moral de las y los estudiantes.

Las actitudes son objetivos de aprendizaje y se deben desarrollar de forma integrada con los conocimientos y las habilidades propios de la asignatura. Es necesario promover el logro de estas actitudes de manera sistemática y sostenida mediante las actividades de aprendizaje, las interacciones en la clase, las actividades extraprogramáticas, las rutinas escolares, y también mediante el ejemplo y la acción cotidiana de las y los docentes y de la comunidad escolar.

Las actitudes por desarrollar en la asignatura de Matemática son las siguientes:

A. Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.
B. Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.
C. Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.
D. Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.
E. Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.
F. Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

La formación matemática en este nivel requiere que las y los estudiantes comprendan y otorguen sentido a los contenidos matemáticos. Deben construir y aprender su propio significado para desarrollar una base sólida y lograr una comprensión profunda de los conceptos y procedimientos que utilizarán más adelante. En este contexto, se espera que el profesor o la profesora utilice un modelo pedagógico que promueva la comprensión de conceptos matemáticos y no la mera repetición y mecanización de algoritmos, definiciones y fórmulas. Para esto, debe planificar cuidadosamente situaciones de aprendizaje en las que los y las estudiantes logren establecer vínculos entre los conceptos y las habilidades matemáticas y puedan demostrar la comprensión por sobre la mecanización.

Para aprender matemática, se necesita comprender conceptos y encontrar relaciones, lo que supone la abstracción de acciones del medio y la habilidad para "hablar", "escribir" y "leer" en lenguaje cotidiano y en lenguaje matemático. En esta propuesta, igual que en la de Educación Básica, se plantea el aprendizaje de matemática como un tránsito desde lo concreto a lo pictórico, para luego llegar a lo simbólico. Esto significa que el o la estudiante adquiere conocimientos mediante el "aprender haciendo" en situaciones concretas, que luego traduce a un nivel gráfico y después expresa en símbolos matemáticos. Se debe considerar al alumno o la alumna como protagonista de su aprendizaje, capaz de aprender y generar representaciones que surgen de una acción determinada.

En esta propuesta se enfatiza el uso de representaciones, analogías y metáforas para una mayor comprensión. En este sentido, los y las estudiantes pueden resolver problemas en distintos niveles de abstracción, transitando en ambos sentidos desde representaciones reales, concretas, hasta representaciones simbólicas, y viceversa. Esta es la esencia del modelo concreto, pictórico y simbólico.

La búsqueda de nuevos conocimientos, así como del desarrollo de habilidades y de una comprensión más profunda de la matemática, ha llevado a los y las docentes a proponer variados lineamientos didácticos y numerosas metodologías de enseñanza. La literatura reciente indica que el éxito es posible en la medida en que el profesor o la profesora sea capaz de establecer situaciones de aprendizaje que promuevan el diálogo, la discusión matemática y el desarrollo de habilidades matemáticas respecto de los contenidos. A su vez, estas situaciones de aprendizaje deben despertar en las y los estudiantes la curiosidad y la capacidad de elaborar conceptos que permitan conectar la matemática con la vida diaria y las diferentes áreas del conocimiento.

Al enseñar, el o la docente debe de tomar en cuenta los siguientes factores para lograr aprendizajes profundos en sus estudiantes:

- **Aprender haciendo:** este recurso metodológico permite comenzar con una experimentación de fenómenos reales para acercarse a conceptos matemáticos, como las ecuaciones, las funciones y las razones trigonométricas, entre otros. De esta manera, se puede descubrir una parábola en el lanzamiento de un balón o al regar con una manguera. A partir de estas experiencias, el o la estudiante debe poder formalizar el fenómeno en lenguaje puramente matemático. Para que el aprendizaje sea efectivo mediante el aprender haciendo, es importante que el profesor o la profesora promueva una discusión con preguntas, observaciones, explicaciones y ejemplos después de las actividades, para que luego formalicen entre todos y todas el concepto nuevo. De este modo, podrán conectar sus conocimientos matemáticos con experiencias vividas.

- **Centrar el aprendizaje en el estudiante:** el o la estudiante es quien hace la clase, el profesor o la profesora guía en los momentos difíciles y prepara el proceso de aprendizaje, considerando los resultados de aprendizaje que se espera lograr. Esta visión de enseñar y aprender se refleja en un modelo que comienza con una acción que debe realizar el o la estudiante, con el o la docente como gestor o gestora. Para comprender los contenidos matemáticos, las y los estudiantes necesitan acumular experiencias de resolución de problemas basados en acciones que les permitan descubrir conceptos, estrategias y soluciones variadas. Además, deben desarrollar una cultura de aprendizaje a partir de los errores, ya que estos son parte del proceso: los errores se acogen positivamente como oportunidades de conversación y búsqueda de soluciones más adecuadas.Posteriormente, es importante que reflexionen sobre el proceso por medio del cual adquirieron los nuevos conocimientos, para transferirlo a nuevas situaciones.

- **Experiencias previas:** al enseñar nuevos contenidos, es relevante que la o el docente recurra a los conocimientos, destrezas, habilidades y experiencias previas de sus estudiantes. Estas experiencias son los fundamentos para desarrollar conceptos nuevos. Por ejemplo: la multiplicación de números naturales sirve para multiplicar números enteros; las proporciones directas son la base para aprender la función lineal; las experiencias con transformaciones isométricas sirven como base para el lenguaje con coordenadas. Así, el nuevo conocimiento se construye sobre el conocimiento previo.

- **Conexiones:** es esencial que se establezcan conexiones entre Matemática y otras asignaturas, para evitar que el aprendizaje sea fragmentado y lograr, en cambio, una interacción cruzada entre las diferentes áreas del conocimiento para alcanzar una comprensión profunda. Con las conexiones, los conocimientos toman sentido, relevancia y utilidad. Esto permite que los y las estudiantes tomen conciencia del contexto en el que se inserta el conocimiento y de su posible aplicabilidad. De este modo, pueden relacionar conceptos de otras

áreas con los conceptos matemáticos. Recurrir a experiencias en situaciones concretas de la vida diaria y utilizar modelos matemáticos, científicos y sociales para comprenderlas y resolverlas, también facilita el aprendizaje.

- **Recurrir frecuentemente a representaciones, analogías y metáforas:** esto facilita la comprensión del significado de los conceptos. Se considera que usar representaciones, analogías y metáforas en clases de Matemática favorece la compresión de los y las estudiantes y, por ende, complementa el proceso de aprendizaje. Se estima que estos recursos son un aporte cognitivo y pedagógico, ya que, al representar situaciones de la vida cotidiana, permiten aclarar conceptos e introducir nuevas ideas haciéndolas más cercanas y significativas, lo que genera en las y los estudiantes mayor motivación y seguridad en relación con sus capacidades.

  Para incorporar metáforas en las clases de Matemática, los alumnos y las alumnas pueden:

  - Utilizar ideas concretas, intuitivas e imaginativas y lenguaje cotidiano al representar un concepto matemático abstracto; por ejemplo: la función se puede representar con metáforas tales como una máquina.
  - Recurrir a objetos familiares o a otros recursos, como esquemas y analogías, para que les sea más fácil entender un concepto o un procedimiento matemático.

  De esta forma, las metáforas proporcionan características familiares al objeto y otorgan relaciones y acciones que los individuos proyectan sobre la situación, para construir nuevos conceptos, nuevas relaciones y nuevas acciones.

- **Progresión de complejidad:** la construcción de una base sólida de aprendizaje considera que cualquier nuevo aprendizaje se asimilará a los aprendizajes previos. Por esto, el o la docente debe saber qué habilidades y conceptos han adquirido las alumnas y los alumnos con anterioridad, para activarlos estratégicamente en función del aprendizaje futuro. Cuando se tienen los conocimientos básicos activados, se inicia el trabajo con el nuevo aprendizaje, que debe ir creciendo en complejidad de manera progresiva, desde lo más simple a lo más complejo.

- **Comunicación y aprendizaje cooperativo:** al elaborar las múltiples tareas de la asignatura, es importante que el o la docente favorezca la comunicación y la colaboración entre sus estudiantes. Analizar, evaluar y representar resultados en común son actividades esenciales, porque profundizan y estimulan el pensamiento crítico y ponen a prueba el aprendizaje. En este punto, son recomendables las presentaciones o conferencias matemáticas o la redacción individual de los procesos en forma de un diario matemático.

- **El uso de tecnologías de información y comunicación (TIC):** la tecnología puede ayudar a las y los estudiantes a aprender matemática. Utilizando las herramientas tecnológicas, pueden ejecutar los procedimientos rutinarios en forma rápida y precisa, liberando tiempo para razonar, elaborar modelos, buscar patrones, comprobar conjeturas y resolver problemas complejos que antes no eran accesibles para ellos. A su vez, los *software* educativos amplían las posibilidades de ejercitación motivante y de acceso a información. La tecnología también ayuda a la evaluación, ya que permite a

los y las docentes examinar los procesos que han seguido sus estudiantes en sus investigaciones matemáticas y los resultados obtenidos.

- **Repasar conceptos y ejercitar:** es importante reforzar y repasar los conceptos y los principios básicos de la asignatura. Para esto, la o el docente debe considerar la ejercitación con el fin de asegurar la comprensión; pero, a su vez, desde la repetición, debe incentivar a sus estudiantes a abordar problemas de mayor desafío y guiarlos(as) a realizar una verdadera actividad matemática.

- **La retroalimentación:** es relevante que las y los estudiantes desarrollen una visión positiva de las matemáticas y se sientan capaces de desempeñarse con una autoestima positiva y con seguridad. Para esto, conviene que el o la docente reconozca el esfuerzo de sus estudiantes, sus observaciones y su iniciativa para explorar nuevos conocimientos por sí mismos(as), en un ambiente que acoja todos los puntos de vista. Se debe aprovechar las oportunidades para generar discusiones sobre las vías de solución y respecto de la efectividad de las estrategias escogidas. En esta diversidad, el alumno o la alumna descubre cómo mejorar y superarse en su proceso de aprendizaje. En entrevistas personales, el profesor o la profesora debe apoyar a cada estudiante en la revisión de su proceso, ayudándole a identificar las áreas que necesita mejorar y aquellas que ya están logradas.

ORIENTACIONES DE EVALUACIÓN

La evaluación formativa ayuda, tanto a docentes como a estudiantes, a conocer los avances y las áreas que es necesario fortalecer para continuar el proceso de aprendizaje. Con esta información, el o la docente puede tomar decisiones para modificar su planificación y adecuarla mejor a las necesidades de sus estudiantes. Por su parte, las y los estudiantes podrán focalizar sus esfuerzos con la confianza de que podrán mejorar sus resultados. Las evaluaciones formativas tienen un carácter de orientación y apoyo al aprendizaje; no son medidas para determinar capacidades. No obstante, permiten obtener información sobre los progresos, la comprensión y el aprendizaje de los contenidos y las habilidades en cualquier etapa o momento del proceso.

Es importante que la evaluación se realice como un continuo dentro de las actividades en la sala de clases, pues forma parte del proceso de aprendizaje.

A continuación se presentan sugerencias de instrumentos de evaluación que se pueden usar durante el proceso de aprendizaje o al final de este, para verificar el logro de los resultados de aprendizaje. Dichos instrumentos permiten que las y los estudiantes demuestren sus habilidades, conocimientos y actitudes durante la hora de clases o después de un proceso de aprendizaje.

- **Proyectos** (de grupos o individuales): están orientados a resolver un problema más complejo, una investigación guiada o el modelamiento de un problema real; pueden durar desde un día completo hasta varias semanas. Los y las estudiantes los llevan a cabo con un alto grado de autonomía, con objetivos claros, acordados previamente, enfatizando el proceso de aprendizaje, y con resultados abiertos. Es la forma ideal para conectar diferentes áreas del conocimiento.

- **Diario de vida matemático:** es un cuaderno o carpeta en la que el o la estudiante desarrolla estrategias personales, exploraciones, definiciones propias o descubrimientos. El profesor o la profesora puede observar estos registros para orientar el desarrollo de las habilidades de sus estudiantes y verificar si comprenden los conceptos de acuerdo al lenguaje que emplean para explicar su pensamiento.

- **Trabajo colaborativo:** las y los estudiantes trabajan una tarea específica en pares o grupos, en la sala y durante la hora de clases. Trabajar en grupo no puede significar que las o los integrantes diluyan la responsabilidad de su propio aprendizaje en el

grupo. El grupo es una plataforma que les facilitará la construcción de su aprendizaje, del que son los únicos responsables; hay que aprender juntos para poder actuar después individualmente. El grupo debe tener claro sus objetivos y los productos que debe lograr; tiene que ser capaz de evaluar el progreso realizado en el logro de esos objetivos y los esfuerzos individuales de cada miembro. Ejemplos de tareas: experimentar, definir un concepto, clasificar, calcular, resolver un problema y argumentar su resolución.

- **Portafolio:** selección de evidencias (que forman un dosier o una carpeta) que el o la estudiante tiene que recoger y aportar en un período determinado, y que responde a uno o más objetivos de aprendizaje. Estas evidencias (problemas resueltos, trabajos, fragmentos de películas, entrevistas, actividades académicas, apuntes, trabajos de asignaturas, entre otras) permiten demostrar si está aprendiendo, a la vez que posibilitan al profesor o la profesora un seguimiento del progreso de este aprendizaje. Las evidencias tienen que acompañarse de una justificación y una reflexión del alumno o la alumna. El o la docente y sus estudiantes seleccionan algunas de las evidencias con una periodicidad determinada, lo que permite que cada estudiante asuma un papel activo en su evaluación.

- **Presentación o conferencia matemática:** se refiere a presentar la resolución de un problema, indicando el proceso y los procedimientos usados para fundamentar el resultado obtenido. Para evaluar una presentación, se requiere una pauta con indicadores, como dominio del tema, uso de materiales de apoyo, uso del lenguaje, y otros que se consideren necesarios para el desarrollo adecuado del tema. Es importante que las y los estudiantes conozcan los indicadores y la forma de evaluación antes de hacer la presentación.

- **Entrevista individual:** mientras el curso trabaja en una tarea, la profesora o el profesor dialoga con uno(a) o más estudiantes de un mismo nivel de desempeño, acerca de un concepto, un desafío o una pregunta relacionada con el tema abordado en esa clase. El o la docente registra esta información como descripción del logro de sus estudiantes.

- **Actividad autoevaluable:** al finalizar un tema o unidad, el profesor o la profesora brinda a sus estudiantes la oportunidad de trabajar con un material que les permita autocorregirse (puede ser una hoja de actividades con las respuestas al reverso). A partir de los resultados, pueden verificar su avance o aquello que deben reforzar, corregir su tarea con ayuda de otras compañeras u otros compañeros, completar su trabajo con recursos que estén a su alcance (cuaderno, libro, afiches, etc.), anotar sus dudas y, en última instancia, pedir ayuda a la o el docente.

SUGERENCIAS PARA EL DESARROLLO DE LAS CLASES DE MATEMÁTICA

La siguiente tabla muestra un ejemplo de una clase de Matemática:

SUGERENCIA DE CLASE	BLOQUE DE 45 MINUTOS
I UNIDAD / EJE NÚMEROS	

Objetivo de Aprendizaje

OA 1

Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales:

- Utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces.
- Combinando raíces con números racionales.
- Resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos.

Habilidades

OA a

Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes:

- Simplificar el problema y estimar el resultado.
- Descomponer el problema en subproblemas más sencillos.
- Buscar patrones.
- Usar herramientas computacionales.

Actitudes

OA D

Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.

Indicadores de Evaluación

- Estiman y aproximan números irracionales.
- Operan con números racionales e irracionales.
- Utilizan la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces.
- Resuelven problemas que involucren raíces en diferentes contextos.

		ACTIVIDAD
INICIO	**Materiales:** Lápiz y hoja de trabajo con una tabla para anotar los resultados. **Tiempo:** 5 minutos.	**Se sugiere comenzar con:** • Cálculo mental de raíces. • Presentación de la actividad y forma de trabajo. • Organización de la clase en grupos de pares. • Observaciones sobre la forma de presentar los resultados; dar el tiempo determinado de trabajo.

	TIEMPO Y MATERIAL	ACTIVIDAD SUGERIDA	IMÁGENES ORIENTADORAS Y REPRESENTACIONES
DESARROLLO	**Tiempo:** 35 minutos	Las y los estudiantes deben descomponer raíces según el siguiente ejemplo. Número natural: 12 Paso a) $\sqrt{12}$ Paso b) $\sqrt{4 \cdot 3}$ Paso c) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}$ Paso d) $2 \cdot \sqrt{3}$ Describen verbalmente los pasos a), b), c) y d) del ejemplo anterior, utilizando las expresiones descomponer, producto, multiplicación de raíces, raíz cuadrada, raíz cuadrada exacta. En la primera parte responden su hoja de trabajo comenzando con la letra a) de la actividad; lo hacen de manera individual y comparan con su compañero o compañera de grupo. **a.** Descomponen, como en el esquema, las raíces cuadradas de los siguientes números naturales: • 72 • 250 • 100 000 A continuación resuelven la alternativa b) en conjunto, para luego tomar una decisión sobre la mejor forma de resolver la actividad c). **b.** Descomponen, como en el esquema, las raíces cuadradas de los siguientes números fraccionarios: • $\frac{75}{16}$ • $\frac{48}{50}$ • $\frac{162}{45}$ **c.** Descomponen, como en el esquema, las raíces cuadradas de los siguientes números decimales: • 0,27 • 4,50 • 0,0012 Como hay trece ejercicios, es conveniente que se pregunte a algunos o algunas estudiantes sobre la respuesta, y que cada grupo la compare con lo que se escribe en la pizarra.	

	TIEMPO Y MATERIAL	ACTIVIDAD SUGERIDA	IMÁGENES ORIENTADORAS Y REPRESENTACIONES
DESARROLLO		Una vez concluida la escritura de todos los resultados, se puede preguntar si obtuvieron algo diferente y pedirles que expliquen brevemente por qué. En estos momentos, las y los estudiantes deben utilizar el vocabulario de raíces, como por ejemplo: "Se descompuso el número 72 en producto de tres factores; luego se extrajo la raíz a cada uno de ellos y el resultado fue la multiplicación de tres raíces exactas".	
CIERRE	**Tiempo:** 5 minutos	El profesor o la profesora concluye la clase con un ejemplo del mismo tipo; utiliza en cada paso el lenguaje adecuado y lo escribe; todo el curso lo anota en su cuaderno. Se puede dar una tarea para la casa, en la que deban practicar tanto el lenguaje matemático como la utilización de la descomposición de raíces. Eventualmente, la siguiente clase puede comenzar con cálculo mental de raíces con descomposición dada o de un paso.	

Propuesta de organización curricular anual[3]

3 Esta propuesta es opcional, por lo tanto, las instituciones pueden generar una organización curricular diferente, de acuerdo a sus contextos escolares.

Objetivos de Aprendizaje para 2º medio

Este es el listado de Objetivos de Aprendizaje de Matemáticas para 2º medio prescrito en las Bases Curriculares correspondientes. El presente Programa de Estudio organiza y desarrolla estos mismos Objetivos por medio de una propuesta de Indicadores de Evaluación, actividades y evaluaciones. Cada institución puede adaptar o complementar la propuesta atendiendo a su propio contexto escolar, siempre que se resguarde el cumplimiento de los OA respectivos.

Se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

HABILIDADES

Resolver problemas

a. Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes:
- › Simplificar el problema y estimar el resultado.
- › Descomponer el problema en subproblemas más sencillos.
- › Buscar patrones.
- › Usar herramientas computacionales.

b. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático.

c. Utilizar lenguaje matemático para identificar sus propias ideas o respuestas.

Argumentar y comunicar

d. Describir relaciones y situaciones matemáticas, usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.

e. Explicar:
- › Soluciones propias y los procedimientos utilizados.
- › Demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas.
- › Generalizaciones por medio de conectores lógicos y cuantificadores utilizándolos apropiadamente.

f. Fundamentar conjeturas usando lenguaje algebraico para comprobar o descartar la validez de los enunciados.

g. Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración si hay saltos o errores.

Modelar

h. Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.

i. Seleccionar modelos e identificar cuándo dos variables dependen cuadráticamente o inversamente en un intervalo de valores.

j. Ajustar modelos, eligiendo los parámetros adecuados para que se acerquen más a la realidad.

k. Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad y determinando sus limitaciones.

Representar

l. Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de estas.

m. Transitar entre los distintos niveles de representación de funciones.

n. Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos.

o. Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.

EJES TEMÁTICOS

Números

1. Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales:

› Utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces.

› Combinando raíces con números racionales.

› Resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos.

2. Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos:
   - Comparando representaciones de potencias de exponente racional con raíces enésimas en la recta numérica.
   - Convirtiendo raíces enésimas a potencias de exponente racional y viceversa.
   - Describiendo la relación entre potencias y logaritmos.
   - Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que involucren potencias, logaritmos y raíces enésimas.

Álgebra y funciones

3. Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x)= ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$):
   - Reconociendo la función cuadrática $f(x) = ax^2$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas.
   - Representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con software educativo.
   - Determinando puntos especiales de su gráfica.
   - Seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda.

4. Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas de la forma:
   - $ax^2 = b$
   - $(ax + b)^2= c$
   - $ax^2 + bx = 0$
   - $ax^2 + bx = c$ (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)

5. Mostrar que comprenden la inversa de una función:
   - Utilizando la metáfora de una máquina.
   - Representándola por medio de tablas y gráficos, de manera manual y/o con software educativo.
   - Utilizando la reflexión de la función representada en el gráfico en un plano cartesiano.
   - Calculando las inversas en casos de funciones lineales y cuadráticas.

6. Explicar el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo:
   - Por medio de situaciones de la vida real y de otras asignaturas.
   - Identificándolo con el interés compuesto.
   - Representándolo de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo.
   - Expresándolo en forma recursiva $f(t+1) - f(t) = a \cdot f(t)$.
   - Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

Geometría

7. Desarrollar las fórmulas del área de la superficie y del volumen de la esfera:

› Conjeturando la fórmula.

› Representando de manera concreta y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo.

› Resolviendo problemas de la vida diaria y de geometría.

8. Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos:

› Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos.

› Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo.

› Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados.

› Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.

9. Aplicar las razones trigonométricas en diversos contextos, en la composición y descomposición de vectores y determinar las proyecciones de vectores.

Probabilidad y estadística

10. Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas:

› Definiendo la variable.

› Determinando los posibles valores de la incógnita.

› Calculando su probabilidad.

› Graficando sus distribuciones.

11. Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

12. Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad:

› Revisando informaciones de los medios de comunicación.

› Identificando suposiciones basadas en probabilidades.

› Explicando cómo una probabilidad puede sustentar suposiciones opuestas.

› Explicando decisiones basadas en situaciones subjetivas o en probabilidades.

ACTITUDES (para 7° básico hasta 2°medio)

A. Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.

B. Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.

C. Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.

D. Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.

E. Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.

F. Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas.

Visión global de los Objetivos de Aprendizaje del año

El presente Programa de Estudio se organiza en cuatro unidades, que cubren en total 38 semanas del año. Cada unidad está compuesta por una selección de Objetivos de Aprendizaje, y algunos pueden repetirse en más de una. Mediante esta planificación, se logran la totalidad de Objetivos de Aprendizaje de las Bases Curriculares del año para la asignatura.

UNIDAD 1

Números

OA 1

Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales:

- Utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces.
- Combinando raíces con números racionales.
- Resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos.

OA 2

Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos:

- Comparando representaciones de potencias de exponente racional con raíces enésimas en la recta numérica.
- Convirtiendo raíces enésimas a potencias de exponente racional y viceversa.
- Describiendo la relación entre potencias y logaritmos.
- Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que involucren potencias, logaritmos y raíces enésimas.

Geometría

OA 7

Desarrollar las fórmulas del área de la superficie y del volumen de la esfera:

- Conjeturando la fórmula.
- Representando de manera concreta y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo.
- Resolviendo problemas de la vida diaria y de geometría.

Tiempo estimado: 54 horas pedagógicas

UNIDAD 2

Álgebra y funciones

OA 3

Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$):

- Reconociendo la función cuadrática $f(x) = ax^2$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas.
- Representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con *software* educativo.
- Determinando puntos especiales de su gráfica.
- Seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda.

OA 4

Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas de la forma:

- $ax^2 = b$
- $(ax + b)^2 = c$
- $ax^2 + bx = 0$
- $ax^2 + bx = c$
- (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$).

OA 5

Mostrar que comprenden la inversa de una función:

- Utilizando la metáfora de una máquina.
- Representándola por medio de tablas y gráficos, de manera manual y/o con *software* educativo.
- Utilizando la reflexión de la función representada en el gráfico en un plano cartesiano.
- Calculando las inversas en casos de funciones lineales y cuadráticas.

Tiempo estimado: 72 horas pedagógicas

UNIDAD 3

Álgebra y funciones

OA 6

Explicar el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo:

- Por medio de situaciones de la vida real y de otras asignaturas.
- Identificándolo con el interés compuesto.
- Representándolo de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo.
- Expresándolo en forma recursiva $f(t + 1) - f(t) = a \cdot f(t)$
- Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

Geometría

OA 8

Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos:

- Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos.
- Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo.
- Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados.
- Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.

OA 9

Aplicar las razones trigonométricas en diversos contextos en la composición y descomposición de vectores y determinar las proyecciones de vectores.

Tiempo estimado: 69 horas pedagógicas

UNIDAD 4

Probabilidad y estadística

OA 10

Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas:

- Definiendo la variable.
- Determinando los posibles valores de la incógnita.
- Calculando su probabilidad.
- Graficando sus distribuciones.

OA 11

Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

OA 12

Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad:

- Revisando informaciones de los medios de comunicación.
- Identificando suposiciones basadas en probabilidades.
- Explicando cómo una probabilidad puede sustentar suposiciones opuestas.
- Explicando decisiones basadas en situaciones subjetivas o en probabilidades.

Tiempo estimado: 71 horas pedagógicas

Visión global de las actitudes del año

Las Bases Curriculares de Matemática establecen un conjunto de Objetivos de Aprendizaje de actitudes por desarrollar a lo largo de todo el ciclo. Aunque el o la docente debe aprovechar todas las oportunidades de aprendizaje de la asignatura para desarrollar esas actitudes, este programa las organiza para que pueda dar especial énfasis a algunas de ellas, según se muestra en la siguiente tabla.

ACTITUDES

UNIDAD 1	UNIDAD 2	UNIDAD 3	UNIDAD 4
OA C Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.	**OA A** Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.	**OA B** Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.	**OA E** Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.
OA D Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.	**OA D** Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.	**OA D** Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.	**OA F** Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas.

INDICADORES DE EVALUACIÓN OBJETIVOS DE APRENDIZAJE ACTITUDINALES	
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE ACTITUDINALES	INDICADORES DE EVALUACIÓN
Se espera que los estudiantes sean capaces de:	Los estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA A Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.	• Aplican estrategias conocidas para obtener una solución. • Buscan y prueban estrategias propias y alternativas. • Escuchan los planteamientos de otros. • Crean tácticas propias.
OA B Demostrar curiosidad, interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.	• Reconocen sus fortalezas y debilidades. • Comparten de forma desinteresada sus puntos de vista. • Formulan preguntas o exponen hipótesis propias acerca de una situación o un problema. • Participan en la búsqueda de una posible solución a un problema.
OA C Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.	• Tienen ideas propias y las defienden, sin rendirse fácilmente. • Planifican su trabajo y los procedimientos detalladamente. • Buscan, aceptan sus errores y repiten procesos. • Comprueban en forma autónoma para validar su resultado.
OA D Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.	• Respetan y valoran las opiniones y logros de otros. • Comparten, obedecen y asumen responsabilidades. • Manejan formas de convivencia, como trabajo entre pares, en grupos chicos, en pleno o en forma individual. • Aceptan reglas y plazos. • Trabajan sin supervisión.
OA E Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.	• Cuestionan datos que les han sido entregados o que hayan encontrado en los medios. • Usan procedimientos matemáticos para confirmar la veracidad de una información y/o para complementarla. • Intercambian opiniones sobre los motivos de la información manipulada. • Toman decisiones basados en conocimientos matemáticos.
OA F Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas.	• Indican y citan de manera adecuada las fuentes usadas. • Usan de manera efectiva la información. • Controlan en forma responsable el uso de la tecnología. • Procesan la información extraída, evitando las copias textuales extremas.

Semestre

1

UNIDAD 1

PROPÓSITO

En esta unidad se profundiza el concepto de raíz, para que las y los estudiantes comprendan el proceso que involucran sus operaciones, estableciendo su relación y extensión con las propiedades de potencias de exponente racional, y explicando sus soluciones y los algoritmos utilizados. Mediante la ejercitación, se busca que entiendan los procesos y su respectivo orden.

Asimismo, las alumnas y los alumnos amplían sus conocimientos sobre potencias, los relacionan con raíces y analizan el proceso inverso. Establecen la relación que existe entre potencias, raíces y logaritmos, mediante representaciones simbólicas y pictóricas, por medio de gráficos o metáforas. Se espera que aprendan a aplicar el concepto de potencias, raíces o logaritmos para resolver problemas rutinarios o no rutinarios en diferentes contextos, y modelar situaciones utilizando el concepto de potencia o raíz. Se pretende también que sean capaces de representar y analizar problemas que se pueden resolver mediante las operaciones de logaritmos, y establecer restricciones según la naturaleza del problema.

A su vez, mediante representaciones concretas como el principio de Cavalieri o un *software* educativo, conjeturan sobre la fórmula del volumen de una esfera, estableciendo su relación con el volumen de un cilindro y un cono, para derivar y fundamentar su representación simbólica. Se busca que aprendan a determinar el área de la superficie de una esfera por medio de conjeturas, estableciendo su representación simbólica, y que puedan resolver problemas de la vida diaria que involucran el volumen de una esfera y el área de su superficie, comprendiendo lo que sucede con la variación del radio y analizando su concepto, ya sea para estimar cantidades o para el uso en contextos cotidianos.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Potencia de base racional y exponente entero.
- Raíz cuadrada.
- Área de una circunferencia.
- Volumen de cilindro y cono.
- Teorema de Pitágoras.

PALABRAS CLAVE

Base, exponente, raíces, logaritmos, estimación, equidistante, área de la esfera, volumen de la esfera.

CONOCIMIENTOS

- Potencias con exponente racional.
- Raíces.
- Logaritmos.
- Volumen de esfera.

HABILIDADES

- Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes:
  - Simplificar el problema y estimar el resultado.
  - Descomponer el problema en subproblemas más sencillos.
  - Buscar patrones.
  - Usar herramientas computacionales. **(OA a)**
- Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático. **(OA b)**
- Fundamentar conjeturas usando lenguaje algebraico para comprobar o descartar la validez de los enunciados. **(OA f)**
- Representar y ejemplificar, utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares, para resolver problemas. **(OA o)**

ACTITUDES

- Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales. **(OA C)**
- Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas. **(OA D)**

UNIDAD 1	
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	INDICADORES DE EVALUACIÓN
Se espera que las y los estudiantes sean capaces de:	Los y las estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA 1 Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales: • Utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces. • Combinando raíces con números racionales. • Resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos.	• Reconocen números cuyo desarrollo decimal es infinito y no tiene periodo. • Estiman y aproximan números irracionales. • Reconocen que los números irracionales no pueden escribirse como un cociente entre números enteros. • Operan con números racionales e irracionales. • Utilizan la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces. • Representan números irracionales como puntos sobre la recta real. • Determinan la existencia de raíces de manera concreta, pictórica y simbólica. • Resuelven problemas que involucren raíces en diferentes contextos.
OA 2 Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos: • Comparando representaciones de potencias de exponente racional con raíces enésimas en la recta numérica. • Convirtiendo raíces enésimas a potencias de exponente racional y viceversa. • Describiendo la relación entre potencias y logaritmos. • Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que involucren potencias, logaritmos y raíces enésimas.	• Relacionan y caracterizan las raíces por medio de potencias de exponente racional. • Derivan y determinan propiedades relativas a multiplicaciones y divisiones con raíces. • Resuelven problemas que involucren raíces y números racionales. • Establecen relaciones entre potencias, raíces y logaritmos. • Comparan representaciones de potencias con exponente racional, con raíces enésimas, y las representan en la recta numérica. • Explican la relación entre potencias y logaritmos. • Convierten desde un tipo de registro a otro; es decir, desde potencias a raíces y viceversa, y desde potencias a logaritmos y viceversa. • Resuelven problemas rutinarios y no rutinarios que involucran logaritmos.

UNIDAD 1	
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	INDICADORES DE EVALUACIÓN
Se espera que las y los estudiantes sean capaces de:	Los y las estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA 7 Desarrollar las fórmulas del área de la superficie y el volumen de la esfera: • Conjeturando la fórmula. • Representando de manera concreta y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo. • Resolviendo problemas de la vida diaria y de geometría.	• Relacionan medidas de contenidos en envases en forma de cono, cilindro y esfera, que tienen el mismo radio y cuya altura también es igual al radio. • Derivan la fórmula del volumen de una esfera, a partir de los datos obtenidos en la comparación. • Reconocen que el volumen del cono es un cuarto del volumen de la esfera, si el radio y la altura son iguales en ambas figuras 3D. • Determinan la relación entre el volumen de la esfera y el volumen de un cono inscrito en ella. • Relacionan la esfera con objetos cotidianos (balón de fútbol, pelota de tenis, etc.). • Representan el volumen de la esfera como un conjunto infinito de conos (o pirámides) que están unidas en el centro. • Derivan el área de la esfera a partir de su volumen, el cual está igualado al volumen de infinitos conos (o pirámides) y de la adición de sus bases, que representaría una aproximación al área de la esfera. • Aplican las fórmulas de volumen y de superficie para resolver problemas geométricos, científicos y de la vida diaria.

SUGERENCIAS DE ACTIVIDADES[4]

Objetivos de Aprendizaje

OA 1

Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales:

- **Utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces.**
- **Combinando raíces con números racionales.**
- **Resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos.**

Actividades

Representar

Elegir y elaborar representaciones e identificar sus límites y su validez. (OA l)

1. La imagen representa un sistema de subconjuntos numéricos:

a. Anotan tres números que estén en cada sistema numérico.

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

2. La imagen muestra un cuadrado pequeño en color gris, de 1 cm de lado:

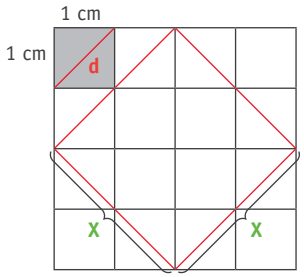


Imagen no a escala

4 Todas las sugerencias de actividades de este Programa constituyen una propuesta que puede ser adaptada de acuerdo a cada contexto escolar, para lo cual se recomienda considerar, entre otros, los siguientes criterios: características de los y las estudiantes (intereses, conocimientos previos, incluyendo preconcepciones, creencias y valoraciones), características del contexto local (urbano o rural, sector económico predominante, tradiciones) y acceso a recursos de enseñanza y aprendizaje (biblioteca, internet, disponibilidad de materiales de estudio en el hogar).

Responden:

- ¿Cuánto mide el área del cuadrado gris?
- ¿Cuánto mide la diagonal del cuadrado gris?
- Comparan el lado x del cuadrado grande (en rojo) con la diagonal del cuadrado pequeño: ¿cuánto mide el lado x?
- Determinan el área del cuadrado grande contando los cuadritos.
- Determinan el lado x del cuadrado grande considerando el contenido de su área.
- Anotan la igualdad de ambas expresiones algebraicas.

3. Descomponen raíces cuadradas de números naturales mediante el siguiente ejemplo:

Representar

Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos. (OA m)

- Número natural: 12
- Paso a) $\sqrt{12}$
- Paso b) $\sqrt{4 \cdot 3}$
- Paso c) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}$
- Paso d) $2 \cdot \sqrt{3}$

a. Describen verbalmente los pasos a), b), c) y d) utilizando las expresiones descomponer, producto, multiplicación de raíces, sacar la raíz cuadrada, raíz cuadrada exacta.

b. Descomponen las raíces cuadradas de los siguientes números naturales, considerando los pasos descritos anteriormente:
   - 72
   - 250
   - 100 000

c. Descomponen las raíces cuadradas de los siguientes números fraccionarios, considerando los pasos descritos anteriormente:
   - $\frac{75}{16}$
   - $\frac{48}{50}$
   - $\frac{162}{45}$

d. Descomponen las raíces cuadradas de los siguientes números decimales, como en el esquema anterior:
   - 0,27
   - 4,50
   - 0,0012

Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)

4. Reducen o desarrollan los siguientes términos numéricos compuestos de números racionales y raíces cuadradas, según se indica.

a. Aplican la descomposición de raíces:

- $2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{18}$
- $4 \cdot \sqrt{48} - 2 \cdot \sqrt{27}$
- $5 \cdot \sqrt{1\,000} - 3 \cdot \sqrt{160}$

b. Multiplican adiciones:

- $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{18} - \sqrt{2})$
- $2 \cdot \sqrt{3}\,(4 \cdot \sqrt{3} + 5 \cdot \sqrt{6})$
- $(6 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{5}) \cdot \sqrt{15}$

c. Aplican los productos notables:

- $(\sqrt{15} + 5)^2$
- $(\sqrt{12} - 4 \cdot \sqrt{3})^2$
- $(2 \cdot \sqrt{7} + 3 \cdot \sqrt{5}) \cdot (2 \cdot \sqrt{7} - 3 \cdot \sqrt{5})$

d. Racionalizan primero el denominador, como en el ejemplo, y luego operan:

- $\sqrt{3} + \frac{6}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \sqrt{3} + \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3}$
- $\sqrt{5} - \frac{15}{\sqrt{5}}$
- $\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}$
- $3 \cdot \sqrt{8} - \frac{4}{\sqrt{32}}$

e. Reducen las expresiones algebraicas aplicando los productos notables. Eligen una estrategia.

- Ejemplo1: $(\sqrt{2} + \sqrt{32})^2 = 2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{32} + 32 = 34 + 2 \cdot \sqrt{64} = 34 + 2 \cdot 8 = 50$
  - Alternativa para el ejemplo1:
    $(\sqrt{2} + \sqrt{32})^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{16 \cdot 2})^2 = (\sqrt{5} + 4\sqrt{2})^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50$
- Ejemplo 2: racionalizar el denominador y reducir la fracción $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$
  - $(\sqrt{3} - \sqrt{27})^2$
  - $(2\sqrt{2} + 3\sqrt{8})^2$
  - $(3\sqrt{125} + 4\sqrt{5})^2$
  - $\frac{5}{\sqrt{12} - \sqrt{7}}$
  - $\frac{3}{\sqrt{24} + \sqrt{21}}$

5. Identifican la raíz cuadrada con una potencia.

Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)

a. Completan el esquema.

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a^1$
- $a^{\square} \cdot a^{\square} = a^1$
- $a^{\square + \square} = a^1$

Si las bases a son iguales, ¿qué número representa el exponente $\square$?

b. Relacionan las raíces cuadradas con las potencias correspondientes. Unen con flechas los números iguales.

$\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt{\frac{4}{5}}$
$\sqrt{0,\overline{3}}$
$\sqrt{1\ 000}$
$(10^{-4})^{\frac{1}{2}}$
$0,25^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{\frac{1}{4}}$
$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt{\frac{1}{10\ 000}}$
$\sqrt{0,01}$
$0,8^{\frac{1}{2}}$
$(10^{3})^{\frac{1}{2}}$

6. Determinan un valor aproximado de las raíces no exactas mediante el algoritmo de Herón. Utilizan la calculadora para los pasos de aproximación. Comparan el valor de aproximación de la raíz, obtenido con el valor que da la calculadora.

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

a. $\sqrt{5}$ con el valor inicial de $a_0 = 2$ y tres pasos del algoritmo.

b. $\sqrt{70}$ con el valor inicial de $a_0 = 8$ y cuatro pasos del algoritmo.

c. $\sqrt{70}$ con el valor inicial de $a_0 = 10$ y cuatro pasos del algoritmo.

d. Comparan los resultados de las actividades b) y c). Explican las diferencias.

e. Investigan sobre la vida y trabajos de Herón.

Observaciones a la o el docente

En esta actividad, los alumnos y las alumnas reconocen un algoritmo de aproximación de raíces cuadradas no exactas. Además, pueden aplicar la forma recursiva de una ecuación de evolución. El algoritmo se denomina Algoritmo de Herón; fue creado en el siglo IV a. C. por un matemático griego y documentado por Herón de Alejandría en el siglo I. El algoritmo se basa en la siguiente idea:

- $a = \sqrt{z} \Leftrightarrow a^2 = z \Leftrightarrow a = \frac{z}{a}$ $(a \neq 0)$.

Se empieza con un valor inicial a_0. Si $a_0 < \sqrt{z}$, entonces $\frac{z}{a_0} > \sqrt{z}$. El promedio de ambos valores está más cerca de $\sqrt{z}$ y se lo denomina con a_1, mientras el término $\frac{z}{a_0}$ se denomina con b_0:

- $a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$
- $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$

.....

- $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ con $b_n = \frac{z}{a_n}$

  ejemplo: $a = \sqrt{2}$

  valor inicial: $a_0 = 1$ --> $b_0 = \frac{2}{1} = 2$

- $a_1 = \frac{1}{2}(1 + 2) = 1{,}5$

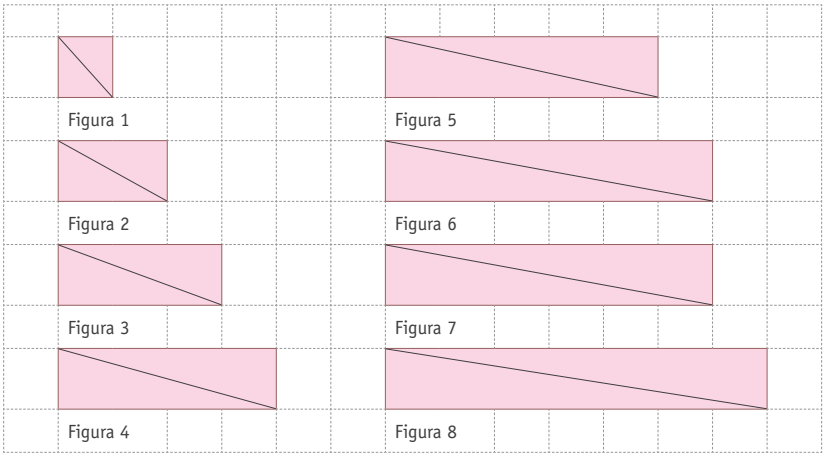
Se sugiere promover el interés frente a soluciones históricas y pedir que las alumnas y los alumnos repitan el algoritmo en forma autónoma, para validar un resultado, usando otros números. (OA C)

® Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA 8 de 7° básico y OA f de 2° medio.

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)

7. En la imagen siguiente se muestra una sucesión de rectángulos cuyas bases se diferencian por una unidad.



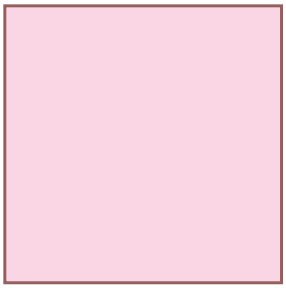
a. ¿Qué expresión algebraica con raíces permite calcular la longitud de la diagonal de la Figura *n*?

b. ¿Cuál es el valor aproximado de la diagonal de la Figura 8?

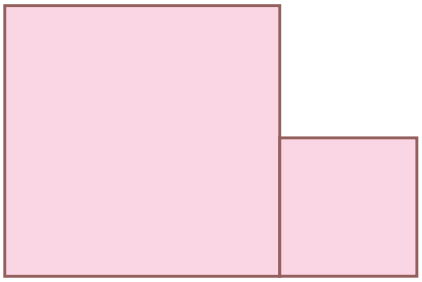
8. Determinan, utilizando raíces, la expresión algebraica de la longitud de la base de cada una de las siguientes imágenes, sabiendo que el área del cuadrado mayor es ***u***.

Resolver problemas

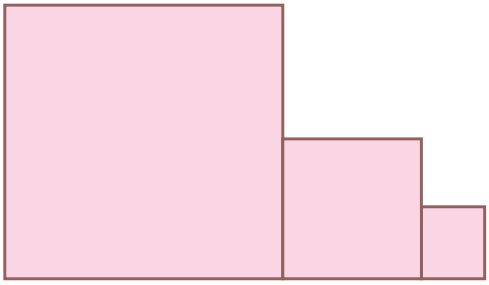
Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)



Base 1:_____



Base 2:_____



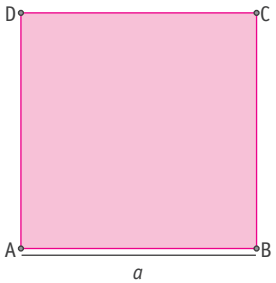
Base 3:_____

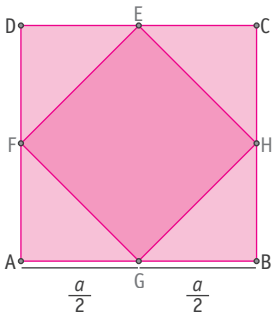
¿Qué expresión permite calcular la longitud de figura de base *n*?

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)

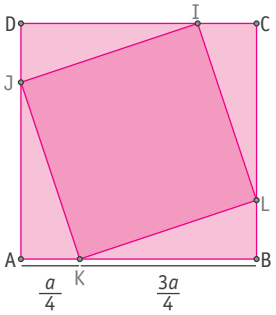
9. Dado el cuadrado ABCD de lado a, determinan, utilizando raíces, la expresión algebraica del perímetro de los cuadrados inscritos en este, como muestran las figuras.





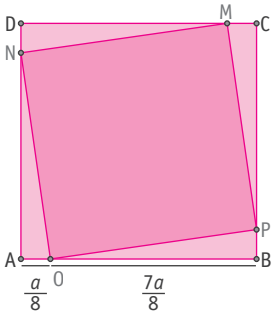
Longitud del lado del cuadrado EFGH: _____

Perímetro del lado del cuadrado EFGH: _____



Longitud del lado del cuadrado IJKL: _____

Perímetro del lado del cuadrado IJKL: _____



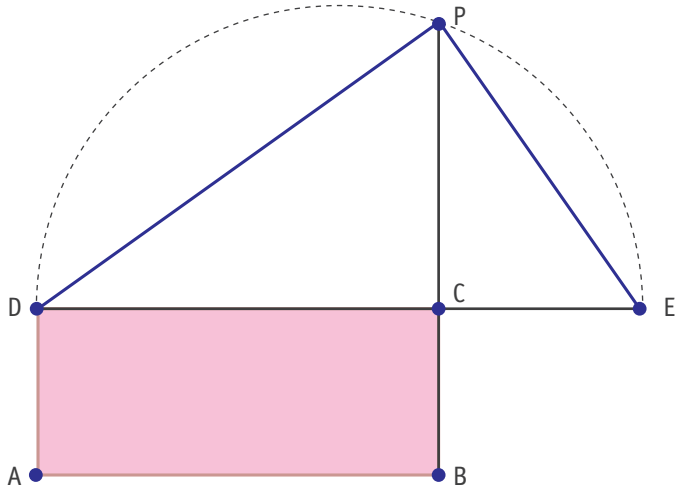
Longitud del lado del cuadrado MNOP: _____

Perímetro del lado del cuadrado MNOP: _____

10. En la figura se han dibujado el rectángulo ABCD (el lado AD mide 1 cm y el lado DC mide 3 cm) y la semicircunferencia de diámetro DE, donde E es un punto de la recta CD, tal que CB = CE. Por el punto C se traza la recta perpendicular al segmento DC. ¿Cuánto mide el segmento CP? Explique.

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)



Observaciones a la o el docente

Este ejercicio se puede retomar en geometría para mostrar que el triángulo PCE es semejante al triángulo PCD.

Se sugiere indicar al alumno o alumna que aporte ideas propias y las defienda en la solución del problema anterior. (OA C)

Objetivos de Aprendizaje

OA 2

Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos:

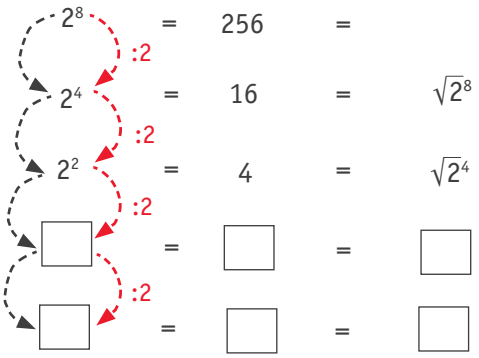
- **Comparando representaciones de potencias de exponente racional con raíces enésimas en la recta numérica.**
- **Convirtiendo raíces enésimas a potencias de exponente racional y viceversa.**
- **Describiendo la relación entre potencias y logaritmos.**
- **Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que involucren potencias, logaritmos y raíces enésimas.**

Actividades

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

1. Completan las siguientes tablas para identificar raíces con potencias de exponentes fraccionarios.
   - Empiezan con una potencia de 2 y un exponente par. Transforman a otras potencias de base 2 dividiendo el exponente por 2:



   - Empiezan con la potencia 10^9. Transforman a otras potencias de base 10 dividiendo el exponente por 3. Elaboran una tabla, como en la actividad anterior.
   - Empiezan con la potencia 2^{16}. Transforman a otras potencias de base 2 dividiendo el exponente por 4. Elaboran una tabla, como en la actividad anterior.

Observaciones a la o el docente

Esta actividad debe relacionar el dividir el exponente por 2 con la acción de extraer la raíz cuadrada. Para aprovechar esta rutina, se puede escribir cada vez $a^{\frac{n}{2}}$. En el caso de la primera actividad, se puede agregar una columna con la representación simbólica de dividir el exponente por 2. Además, se puede repetir la misma simbología en las actividades siguientes, para relacionar las raíces con las potencias de exponente racional.

Se sugiere aplicar estrategias conocidas para determinar relaciones, obtener soluciones conectadas con conocimientos previos y repetir procesos. (OA c)

Representar

Elegir y elaborar representaciones e identificar sus límites y su validez. (OA l)

2. Calculan potencias de exponentes racionales y raíces enésimas.

a. Transforman potencias de exponentes racionales en una potencia de una potencia, y viceversa.

Ejemplo: $5^{\frac{2}{3}} = (5^{\frac{1}{2}})^2 = (5^2)^{\frac{1}{3}}$

- $2^{\frac{3}{2}} =$
- $7^{\frac{3}{4}} =$
- $10\ 000^{\frac{5}{4}} =$
- $(4^{\frac{1}{5}})^3 =$
- $(8^3)^{\frac{1}{5}} =$

b. Transforman potencias de exponentes racionales en una raíz enésima, y viceversa.

Ejemplo: $4^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{4^3}$

- $15^{\frac{4}{3}} =$
- $8^{\frac{5}{6}} =$
- $\sqrt[5]{2^6} =$
- $\sqrt[3]{10^5} =$

c. Obtienen la raíz enésima por descomposición.

Ejemplo: $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = 2 \cdot \sqrt[3]{5}$

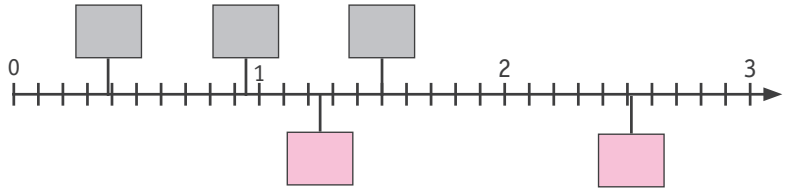
- $\sqrt[3]{250} =$
- $\sqrt[4]{48} =$
- $\sqrt[5]{96} =$

Representar

Elegir y elaborar representaciones e identificar sus límites y su validez. (OA l)

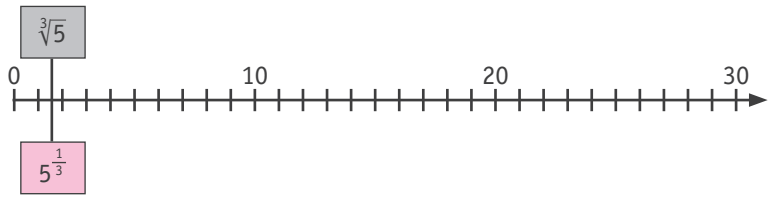
3. Estiman las raíces y las potencias y ponen los números correspondientes en las marcas de la recta numérica que se muestra más abajo.

a. $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$; $2^{\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[5]{10^2}$; $\sqrt[4]{0{,}025}$



b. El valor estimado de $\sqrt[3]{5}$ es 1,7. Calculan el valor aproximado de las expresiones numéricas que se indican más abajo, mediante la descomposición, luego los anotan en la recta numérica en una marca superior y agregan la potencia con el exponente racional correspondiente en la marca inferior.

- $\sqrt[3]{40}$ =
- $\sqrt[3]{5\ 000}$ =
- $\sqrt[3]{320}$ =
- $\sqrt[3]{625}$ =
- $\sqrt[3]{8\ 640}$ =



Representar

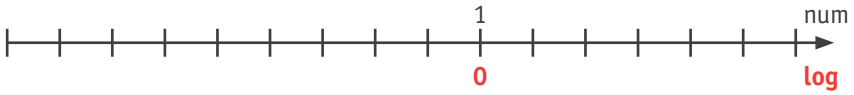
Elegir y elaborar representaciones e identificar sus límites y su validez. (OA l)

4. Representan números positivos con su logaritmo de base 10.

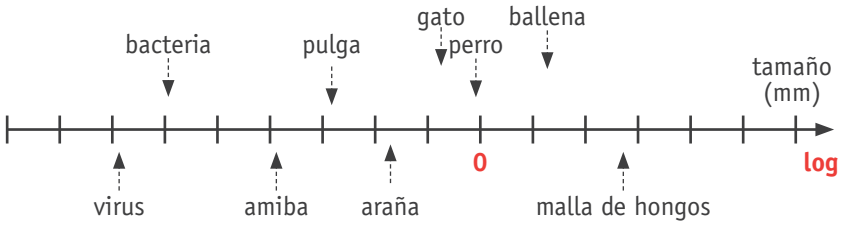
a. Relacionan los valores posicionales de los números dados en la primera columna, con las potencias de 10 y su exponente. Completan la tabla siguiente:

VALOR POSICIONAL	POTENCIA DE 10	EXPONENTE	EXPRESIÓN CON LOGARITMO
0,000 000 1	10^{-7}	−7	log(0,000 000 1) = −7
0,000 001			
0,000 01			
0,000 1			
0,001			
0,01			
0,1			
1			
10			
100			
1 000			

b. Completan la siguiente recta numérica logarítmica con los valores posicionales y sus logaritmos correspondientes:



c. Leen y anotan los tamaños aproximados (estatura, diámetro, etc.) de algunos seres vivos, en la recta numérica logarítmica que se presenta a continuación:



® **Ciencias Naturales OA j de 2° medio.**

5. Calculan productos, cocientes y potencias de números mediante operaciones de sus logaritmos correspondientes.

Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)

a. Completan la tabla siguiente:

NÚMERO 1	NÚMERO 2	PRODUCTO	LOGARITMO 1	LOGARITMO 2	LOGARITMO DEL PRODUCTO
100	10 000	1 000 000	2	4	6
10^3	10^5				
100 000	1 000				
10^a	10^b				

NÚMERO 1	NÚMERO 2	COCIENTE	LOGARITMO 1	LOGARITMO 2	LOGARITMO DEL COCIENTE
1 000 000	100	10 000	6	2	4

Responden:

- ¿Qué regularidad existe entre el producto de los números, los logaritmos y el logaritmo del producto?
- ¿Qué regularidad existe entre el cociente de los números, los logaritmos y el logaritmo del cociente?

b. Determinan los logaritmos de potencias de base 2:

- $\log_2 128$
- $\log_2 1\,024$
- $\log_2 32$
- $\log_2 \frac{1}{4}$
- $\log_2 0{,}125$
- $\log_2 1$

c. Calculan los siguientes productos y cocientes de las potencias de base 2, aplicando las reglas de los logaritmos de base 2:

- $64 \cdot 32$
- $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$
- $1\,024 : 64$
- $512 : \frac{1}{16}$

Observaciones a la o el docente

Para cultivar y mejorar las formas de convivencia, se sugiere que las y los propios estudiantes corrijan los resultados y que prevalezcan el respeto, el valor del trabajo y los logros alcanzados. (OA D)

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

6. La acidez de una sustancia se determina mediante el valor pH. Entre la concentración c de los iones de hidrógeno en mol/litro y el valor del pH, existe la relación pH = –log c.

a. Calculan el valor pH de:

- lejía de bicarbonato $c = 2 \cdot 10^{-14}$ mol/litro
- tomates $c = 6{,}3 \cdot 10^{-5}$ mol/litro
- jugo de limones $c = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ mol/litro

b. Calculan la concentración de los iones de hidrógeno de:

- agua jabonada pH = 10
- sangre pH = 7,5
- agua mineral pH = 4,5

https://quimicade5to.wikispaces.com/P+H

Observaciones a la o el docente

Esta actividad se puede relacionar con Química y trabajar con esa asignatura en un experimento para medir y observar el pH en diferentes productos.

Se sugiere pedir a las y los estudiantes que planifiquen su trabajo en relación con el experimento, y que describan brevemente los procedimientos y las observaciones de manera precisa. (OA D)

® **Ciencias Naturales OA j de 2° medio.**

7. En el agua de un pozo se puede determinar la profundidad *x*, en dependencia del porcentaje *p* de la intensidad de la luz entrante que queda en el lugar: $x = \frac{\log p}{-0,9}$ (*x* en metros).

Resolver problemas
Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

a. Determinan la profundidad en la cual existen las siguientes intensidades de luz:
   - p = 80 %
   - p = 40 %
   - p = 20 %
   - p = 10 %

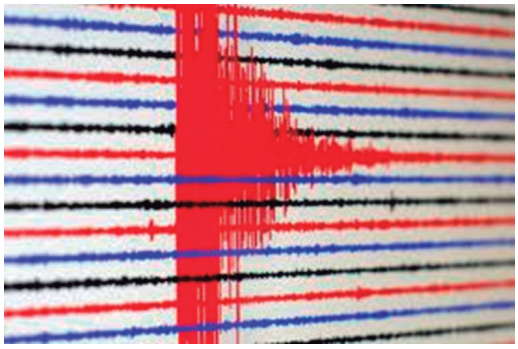
b. ¿La reducción de la intensidad sigue una función afín? Explican y comunican la respuesta.

8. La magnitud de un terremoto se mide en grados de la escala Richter. Si un sismógrafo está a una distancia de 100 km del epicentro y registra la amplitud de la oscilación de 1 mm, que corresponde a 10^3 µm (micrómetro), la magnitud del terremoto en el epicentro es 3, lo que coincide con el exponente 3 de la potencia en base 10, que corresponde, a su vez, a la amplitud medida en micrómetros.

Resolver problemas
Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

- Desarrollan la expresión matemática con la cual se determina la magnitud **M** de un terremoto, en dependencia de la amplitud **A** registrada por el sismógrafo.

- Calculan las magnitudes de los terremotos registrados a 100 km de distancia del epicentro. Completan la tabla.



AMPLITUD EN mm	AMPLITUD EN µm (MICRÓMETROS)	MAGNITUD (RICHTER)
1	10^3	3
2,5		
47,3		
60		
120		

® **Ciencias Naturales OA 9 de 7° básico, OA 13 de 1° medio y OA a de 2° medio.**

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

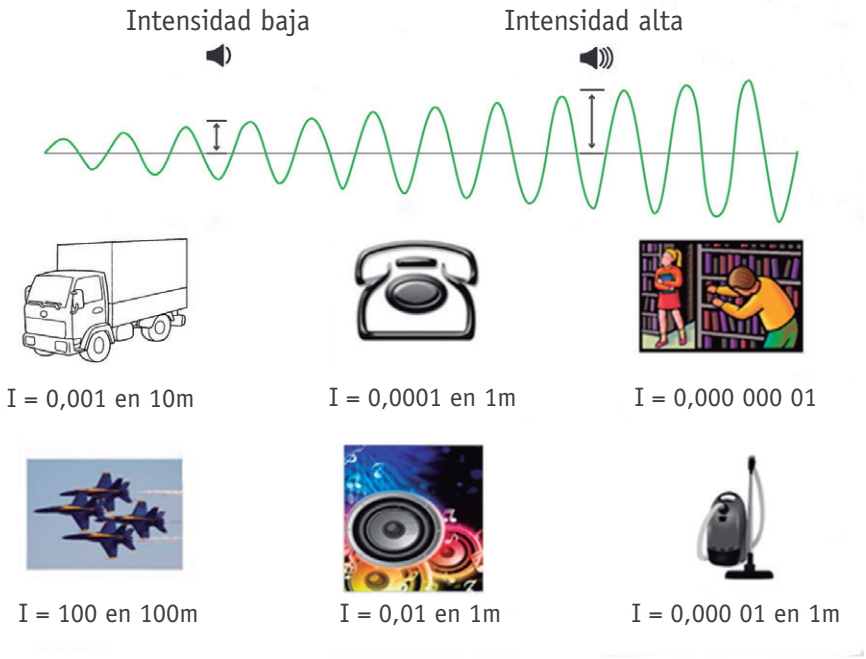
9. Una planta nuclear está diseñada para resistir un terremoto de magnitud 8,25 Richter.
   - Si se aumenta la magnitud en un punto en la escala de Richter, ¿cuántas veces más grande es la amplitud de la oscilación del movimiento de la Tierra?
   - Si ocurre un terremoto de magnitud 9,0, ¿cuánto más grande es la amplitud del movimiento en comparación con la amplitud máxima esperada de 8,25?
   - Entre la energía **E** de la oscilación de la Tierra y la magnitud **M** del terremoto, existe una fórmula de aproximación: $\log E = 1{,}5M$. Calculan el aumento de la energía **E** si la magnitud **M** del terremoto sube un grado.

® **Ciencias Naturales OA 9 de 7° básico, OA 13 de 1° medio y OA a de 2° medio.**

10. El nivel del volumen **L** de un sonido depende de la Intensidad **I** del sonido según la ecuación: L(I) = 10logI +120[dB]. La intensidad mínima a partir de la cual el oído humano puede registrar un tono es de 10^{-12} [Watt/m^2].

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)



- Calculan mediante las intensidades el nivel del volumen de los sonidos en dB.
- Completan la tabla con los niveles.

FUENTE DEL SONIDO	NIVEL DEL VOLUMEN L(I) EN dB	RIESGO DE EXPOSICIÓN
	140	Daña la audición en poco tiempo.
	130	Daña la audición en poco tiempo.
	100	Exposición máxima: 15 min.
	90	Exposición máxima: 3 h.
	80	Baja la concentración por largo tiempo.
	70	Baja la concentración por largo tiempo.
	40	No hay.

® **Ciencias Naturales OA 10 1° medio, OA 1 y OA j de 2° medio.**

Objetivos de Aprendizaje

OA 7

Desarrollar las fórmulas del área de la superficie y del volumen de la esfera:

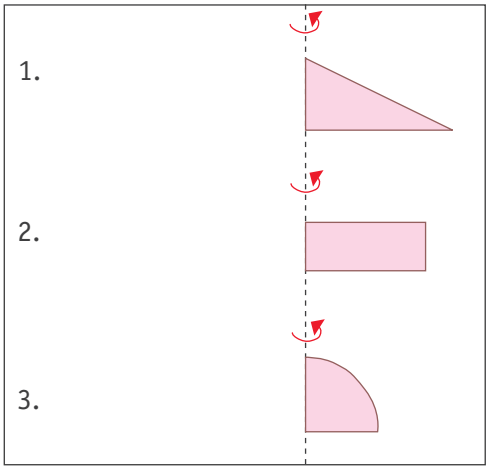
- **Conjeturando la fórmula.**
- **Representando de manera concreta y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo.**
- **Resolviendo problemas de la vida diaria y de geometría.**

Actividades

Argumentar y comunicar

Usar lenguaje algebraico para comprobar o descartar la validez de conjeturas. (OA f)

1. A las siguientes figuras 2D les aplican rotaciones enteras alrededor de un eje que es parte de la figura misma.



- Conjeturan acerca del tipo de figura 3D que se genera por la rotación.
- Elaboran un dibujo 3D completando la figura 2D.

Observaciones a la o el docente

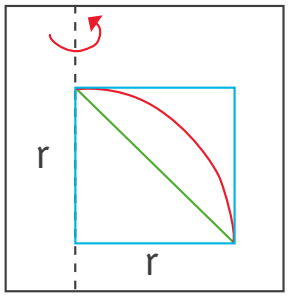
Esta actividad se puede trabajar con material concreto y en equipos. Los materiales son papel (cartón) e hilo. Se dibujan las figuras 2D sobre el papel, se recortan y se pegan al hilo, que cumple la función de eje: se debe girar para ver qué figura 3D se forma por rotación.

Se sugiere promover el trabajo en equipo (mientras una o un estudiante gira, otro u otra observa y anota), considerar los aportes de todos y todas, y el interés y respeto por los argumentos de cada integrante del grupo. (OA D)

2. El dibujo muestra un cuadrado de lado *r*. Dentro del cuadrado están inscritos la cuarta parte de un círculo de radio *r* y un triángulo rectángulo isósceles con base *r* y altura *r*. El cuadrado gira junto con el círculo y el triángulo inscrito alrededor del eje indicado.

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)



a. Desarrollan la expresión algebraica del volumen del cilindro que se genera por la rotación del cuadrado.

b. Desarrollan la expresión algebraica del volumen del cono que se genera por la rotación del triángulo inscrito.

c. Estiman el volumen de la semiesfera que se genera por la rotación de la cuarta parte del círculo inscrito. Explican y comunican las respuestas.

d. Expresan la fórmula del volumen de una esfera basándose en el resultado de la actividad c).

Observaciones a la o el docente

Se recomienda usar un *software* educativo gratuito, como *Geogebra*, *Geometry Software* o similares que están disponibles en el internet.

3. Resuelven problemas geométricos que involucran el volumen de esferas ($\pi \approx 3{,}14$).

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)

- Una pelota de plumavit tiene un diámetro de 5 cm. Calculan su volumen.
- Otra pelota de plumavit tiene un diámetro de 10 cm. Determinan su volumen sin aplicar la fórmula y sobre la base del resultado anterior.
- Una esfera tiene radio *a*. Determinan el radio de una esfera que tiene el doble del volumen y lo expresan con la variable *a*.
- Se reduce el radio *r* de una esfera a la siguiente parte: $\sqrt[3]{\frac{r}{2}}$. ¿A qué parte se reduce el volumen de la esfera? Verifican el resultado con el cálculo respectivo.

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)

4. Se quiere empacar cuatro pelotas de plumavit de 5 cm de diámetro, en una caja de cartón, y se debe utilizar un mínimo de material para la caja.
   - ¿Qué forma debe tener la caja? Explican y comunican la respuesta.
   - Calculan el espacio que ocupan las cuatro pelotas en la caja.
   - Determinan el porcentaje del espacio de la caja que ocupan las cuatro pelotas.

Observaciones a la o el docente

Se recomienda que las y los alumnos trabajen en grupos. Cada grupo elige una foto para estimar el diámetro y calcular el volumen real de la esfera o pelota, y presenta su trabajo a los demás, así comparten sus conjeturas y soluciones con respecto a la actividad. Se sugiere promover actitudes como respetar y valorar las opiniones de todos y todas, lograr una buena convivencia, compartir y asumir las responsabilidades impuestas por el grupo. (OA D)

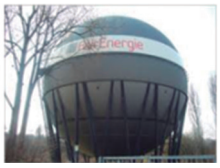
Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)

5. En cada una de las tres fotos (A, B y C) aparecen objetos que tienen la forma de una esfera.

A.

B.

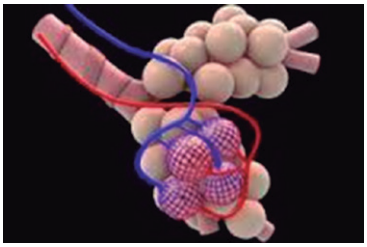
C. 

   - Observan atentamente los detalles de cada foto. ¿Qué diámetro puede tener la esfera en la realidad? Explican y comunican sus estimaciones.
   - Con las medidas estimadas, calculan el volumen de las esferas y lo expresan en una unidad adecuada.

6. Los alvéolos pulmonares tienen, en promedio, un diámetro de 0,2 mm. Se estima que el pulmón humano tiene 400 000 000 de alvéolos.

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)



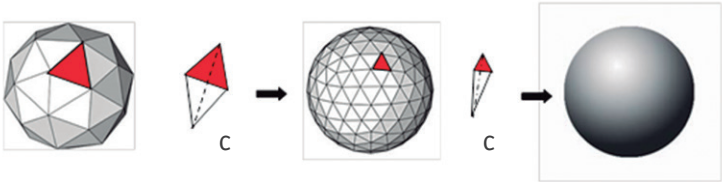
- Expresan el radio de un alvéolo en notación científica, en la unidad de dm.
- Expresan el número de los alvéolos en notación científica.
- Calculan el volumen de un alvéolo pulmonar mediante la notación científica.
- Calculan el volumen total que ocupan los alvéolos en el pulmón.

® **Ciencias Naturales OA 5 de 8° básico.**

7. El esquema muestra la aproximación de un poliedro a una esfera. Desarrollan paso a paso la fórmula del área de la superficie de una esfera.

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)



- ¿Qué largo tienen las aristas laterales de la pirámide? Explican y comunican la respuesta.
- ¿Qué pasa con la altura de la pirámide si el poliedro se aproxima a una esfera? Explican y comunican la respuesta.
- La fórmula del volumen de una pirámide es $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$ en la cual la variable A_b es el área de la base. Despejan la fórmula del volumen a la variable A_b.
- ¿Qué pasa con la unión de todas las bases de las pirámides si el poliedro se aproxima a una esfera? Explican y comunican la respuesta.
- Verifican, con los resultados anteriores, que el área de la superficie de una esfera se determina mediante la fórmula $V = 4\pi r^2$.

Observaciones a la o el docente

Se sugiere hacer un listado de pasos del desarrollo de la fórmula del área. El profesor o la profesora puede hacerla antes o el curso puede elaborarla mediante una lluvia de ideas, de manera de promover el interés por efectuar esta actividad. También se puede incluir trabajo con material concreto para elaborar los modelos propuestos en la actividad. Es importante que los alumnos y las alumnas muestren en actividades similares esfuerzo y meticulosidad, y que trabajan con perseverancia y rigor con las representaciones concretas, pictóricas y simbólicas que usan para resolver problemas. (OA c)

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

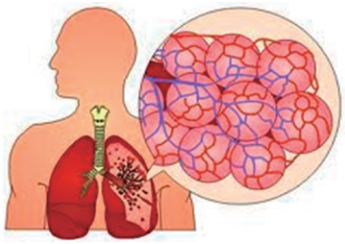
8. Un globo de un árbol de Navidad tiene un diámetro de 6 cm.

- Calculan el área de la superficie del globo.
- Para colorearlo con un color metálico brillante, se aplica una capa de color con 0,1µm. (1µm = 10^{-6} m). Calculan la cantidad de color que se necesita para la producción de 1 000 000 de globos de Navidad ($\pi \approx 3{,}14$).

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

9. Los alvéolos pulmonares tienen un diámetro aproximado de 0,2 mm. Se estima que el número de alvéolos en el pulmón humano es de 400 000 000.



- Expresan el radio de un alvéolo en notación científica, en la unidad de dm.
- Expresan también el número de los alvéolos en notación científica.
- Calculan el área de la superficie de un alvéolo pulmonar.
- Calculan el área total de todos los alvéolos de un pulmón humano y la comparan con el área de una superficie de la realidad.

® **Ciencias Naturales OA 5 de 8° básico.**

10. El radio de la Tierra es de 6 378 km y el radio de la Luna es de 1 738 km.

- Calculan el área de la superficie de la Tierra y de la Luna.
- Calculan la razón entre el radio de la Tierra y el radio de la Luna.
- Calculan la razón entre el área de la superficie de la Tierra y el área de la superficie de la Luna. Explican y comunican la respuesta.
- El agua de los océanos ocupa dos tercios de la superficie de la Tierra. Comparan el área de tierra firme de la Tierra, con el área de la superficie de la Luna.

® **Ciencias Naturales OA 5 de 8° básico.**

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN

EVALUACIÓN 1

Objetivos de Aprendizaje

OA 1

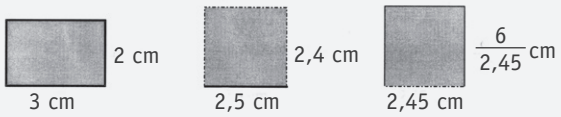
Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales:

- **Utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces.**
- **Combinando raíces con números racionales.**
- **Resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos.**

Indicadores de Evaluación

- Reconocen números cuyo desarrollo decimal es infinito y no tiene periodo.
- Estiman y aproximan números irracionales.
- Reconocen que los números irracionales no pueden escribirse como un cociente entre números enteros.
- Operan con números racionales e irracionales.
- Representan números irracionales como puntos sobre la recta real.
- Determinan la existencia de raíces de manera concreta y pictórica.
- Resuelven problemas de la vida real.

EVALUACIÓN 1

ACTIVIDAD	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
En parejas, construyen un número que no es fracción y que no es periódico. Continúan la siguiente secuencia:  • Consideran que el área se debe mantener. • Completan la secuencia con, al menos, dos rectángulos más. • Conjeturan sobre la relación entre el área del rectángulo y la medida de los lados del rectángulo que sigue en esta secuencia. Comprueban con la calculadora y argumentan geométricamente. Resuelven el siguiente problema: El rollo de papel higiénico está presente en todos los baños y transportar una gran cantidad es un tema muy importante para las compañías que lo fabrican. • Calculan el volumen de un rollo de papel higiénico de manera aproximada. • Determinan el volumen de un millón de rollos de papel higiénico, de manera aproximada. • Responden cuáles serían las medidas ideales de una caja (en forma de paralelepípedo o cubo) para transportar un millón de rollos. • Comentan en el curso sobre la cantidad de rollos de papel higiénico que necesita la ciudad en la que viven y la mejor forma de transportarla de una sola vez.	• Utilizan los conocimientos de construcción geométrica para construir un número irracional. • Representan números irracionales sobre la recta numérica. • Reconocen que el número 2,5 se obtiene al dividir la adición de los lados por 2. • Reconocen que el número 2,4 se obtiene para conservar el área del rectángulo. • Determinan los siguientes rectángulos respetando las reglas antes observadas. • Comprueban con la calculadora sus resultados y conjeturas. • Conjeturan sobre el cálculo de la raíz cuadrada de 6. • Argumentan geométricamente sobre el cálculo de la raíz de 6, utilizando la secuencia y prediciendo sobre la medida de los lados de un cuadrado. • Modelan situaciones sobre el transporte de los rollos de papel higiénico. • Utilizan la fórmula del volumen de un cilindro para determinar el volumen de un rollo de papel. • Determinan medidas ideales y reales de una caja en forma de paralelepípedo, que permita transportar cierta cantidad de rollos de papel higiénico.

EVALUACIÓN 2

Objetivos de Aprendizaje

OA 2

Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos:

- **Comparando representaciones de potencias de exponente racional con raíces enésimas en la recta numérica.**
- **Convirtiendo raíces enésimas a potencias de exponente racional y viceversa.**
- **Describiendo la relación entre potencias y logaritmos.**
- **Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que involucren potencias, logaritmos y raíces enésimas.**

Indicadores de Evaluación

- Resuelven problemas que involucren raíces y números racionales.
- Establecen relaciones entre potencias, raíces y logaritmos.
- Convierten desde un tipo de registro a otro; es decir, desde potencias a raíces y viceversa, y desde potencias a logaritmos y viceversa.
- Resuelven problemas rutinarios y no rutinarios, que involucran logaritmos.

ACTIVIDAD	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
Esta actividad se presta para que los alumnos y las alumnas se autoevalúen, y para que el o la docente asesore a un o una estudiante o más, por medio de una entrevista individual.	• Reconocen cuándo dos o más números son iguales. • Determinan diferencias en la forma de escribir un número. • Utilizan las operaciones de números reales en forma adecuada y precisa, de manera escrita y mentalmente. • Completan correctamente la tabla utilizando el modelo de ejemplo. • Relacionan la raíz de un número con la escritura en forma de potencia y con los logaritmos. • Conjeturan sobre la propiedad de potencias en logaritmos de base 10; concluyen que log 10n = *n*.

1. Marcan los números iguales con el mismo color. Luego responden si queda alguno sin pintar.

1 $\quad 0{,}037 \cdot 10^5$ $\quad 2 \cdot \log 10^5$ $\quad \sqrt{4}$ $\quad (\log 10^4) \cdot (\log 10^y)$

10 millones $\quad 1{,}85 \cdot \log 100$

$\sqrt{10^8}$ $\quad 50\,000$ $\quad \sqrt{1296}$ $\quad \sqrt{10^{14}}$

$100^{\frac{1}{2}}$ $\quad 3{,}7 \cdot \sqrt{10\,000}$ $\quad \sqrt{100}$ $\quad \sqrt{16} \cdot \sqrt{81}$ $\quad 10\,000\,000$

10 $\quad 4{,}5 \cdot 2^3$ $\quad 2$ $\quad 500 \cdot \sqrt{10\,000}$ $\quad 0{,}7 - \log(1\,000)$

$\log 100$ $\quad 10\,000$

2. Completan la siguiente tabla:

NÚMEROS	LOGARITMO	RAÍZ	POTENCIA
10 2 100	log 100 = 2	$\sqrt{100} = 10$	$10^2 = 100$
10 3 1 000		$\sqrt[3]{100} = 10$	
10 4 10 000			
10 0 1			
10 0,1 −1			
10 0,01 −2			
10 0,001 −3			

EVALUACIÓN 3

Objetivos de Aprendizaje

OA 7

Desarrollar las fórmulas del área de la superficie y del volumen de la esfera:

- **Conjeturando la fórmula.**
- **Representando de manera concreta y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo.**
- **Resolviendo problemas de la vida diaria y de geometría.**

Indicadores de Evaluación

- Aplican las fórmulas de volumen y de superficie para resolver problemas geométricos, científicos y de la vida diaria.

ACTIVIDAD	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
Esta evaluación incluye una presentación, individual o en pares, de la resolución de uno de los problemas planteados. También se podría agregar la resolución de uno de los problemas al portafolio. Los y las estudiantes resuelven los siguientes problemas: **1.** Un cilindro de plomo de 35 mm de diámetro fue transformado en una esfera de 50 mm de diámetro. ¿Cuál era la altura del cilindro? **2.** El pulmón de un adulto tiene alrededor de 300 millones de alvéolos y el diámetro aproximado de cada uno es de 0,3 mm. En la superficie de un alvéolo ocurre el traspaso de gases desde el exterior al interior de nuestro cuerpo. ¿Cuál es el área de superficie de traspaso de gases de un pulmón? **3.** Una llave rota deja caer agua en forma de esferas de 5 mm de diámetro cada tres segundos. ¿Cuánta agua se pierde por esta llave al cabo de un día? **4.** El diámetro de la Tierra y de la Luna están en razón de 11:3. ¿En qué razón están el área de superficie y el volumen de la Tierra con las medidas respectivas de la Luna? ¿Se observa alguna relación entre la razón de los diámetros y la razón de las áreas de superficie? ¿Y en las del volumen?	• Utilizan la fórmula de área de superficie y de volumen de una esfera, para responder de manera adecuada a las preguntas planteadas. • Comparan medidas de cilindros con medidas de la esfera. • Reconocen que la superficie de millones de alvéolos que están en nuestro interior pueden ser muy grandes. • Utilizan de manera adecuada las diferentes unidades de medidas. • Reconocen que la cantidad de agua perdida en un día es bastante considerable (comentan sobre la necesidad de cuidar el agua y de reparar llaves rotas). • Calculan razones entre dos cantidades referentes al área de superficie y volumen de la Luna y de la Tierra. • Conjeturan que la razón de los diámetros es la misma que la razón de los radios. • Conjeturan que, si el radio es elevado al cuadrado, entonces la razón de las áreas de superficie corresponde al cuadrado de la razón de los diámetros. • Conjeturan sobre la razón de los volúmenes utilizando las conjeturas anteriores.

UNIDAD 2

PROPÓSITO

En esta unidad, se pretende que los y las estudiantes amplíen su conocimiento de funciones lineales, integrando el comportamiento cuadrático a la linealidad. Se espera que sean capaces de establecer distintas representaciones gráficas de la función cuadrática, utilizando tablas y gráficos obtenidos de forma manual o por medio de un *software* educativo. Asimismo, se busca que describan el comportamiento de la función cuadrática con sus propias palabras, que lo relacionen con comportamientos de la vida real, y esto, a su vez, con el gráfico; que aprendan a determinar puntos especiales sobre el gráfico utilizando su conocimiento sobre expresiones algebraicas y productos notables, y que establezcan la relación entre la intersección de la gráfica con el eje X y la solución de una ecuación cuadrática, diferenciando cuándo esta tiene o no solución. También se espera que sean capaces de describir modelos de situaciones de cambio cuadrático, como oferta y demanda, lanzamiento de balones, caídas de aguas y otros.

Se busca que aprendan a resolver ecuaciones cuadráticas, ya sea mediante la gráfica de la función cuadrática asociada, por medio de la aplicación del concepto de raíz cuadrática o con la fórmula, reforzando de este modo su conocimiento de función cuadrática; que comprendan el concepto de función inversa mediante sus distintas representaciones, ya sea con metáforas, por medio de su representación en gráficas o tablas, o por medio de un *software* educativo. Asimismo, se pretende que sean capaces de establecer la preimagen en el contexto de las tablas de valores, y utilizar este conocimiento para resolver problemas, además de escoger un modelo e identificar cuándo dos variables dependen de forma cuadrática, lineal o inversa.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Funciones lineal y afín.
- Representación gráfica de una función.
- Ecuación de primer grado.

PALABRAS CLAVE

Función cuadrática, ecuación de segundo grado, crecimiento, decrecimiento, punto de equilibrio, puntos de intersección, inversa de una función, preimagen.

CONOCIMIENTOS

- Función cuadrática.
- Ecuación cuadrática.
- Gráfica de función cuadrática.
- Función inversa.

HABILIDADES

- Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad. **(OA h)**
- Seleccionar modelos e identificar cuándo dos variables dependen cuadráticamente o inversamente en un intervalo de valores. **(OA i)**
- Ajustar modelos, eligiendo los parámetros adecuados para que se acerquen más a la realidad. **(OA j)**
- Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y la validez de estas. **(OA l)**
- Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas. **(OA o)**

ACTITUDES

- Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas. **(OA A)**
- Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas. **(OA D)**

UNIDAD 2	
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	INDICADORES DE EVALUACIÓN
Se espera que las y los estudiantes sean capaces de:	Los y las estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA 3 Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$: $(a \neq 0)$ • Reconociendo la función cuadrática $f(x) = ax^2$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas. • Representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con *software* educativo. • Determinando puntos especiales de su gráfica. • Seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda.	• Reconocen representaciones de la función cuadrática en curvas de la vida cotidiana (balísticas, caída de pelotas, caída de agua, etc.). • Grafican funciones cuadráticas a partir de una tabla de valores en la cual están dados los diferentes parámetros a, b, c. • Elaboran gráficos de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, considerando $a > 0$ o $a < 0$ (variando respectivamente b y c). • Grafican y derivan la función para distintos valores de sus parámetros, obteniendo la forma canónica $y = a(x - d)^2 + e$. • Analizan las variaciones de la gráfica mediante diferentes medios de representación. • Marcan y encuentran numéricamente la intersección de la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, con el eje x. • Determinan en el plano cartesiano las regiones cuyos puntos $P(x,y)$ representan soluciones (x,y) de las inecuaciones cuadráticas $y < ax^2 + bx + c$ o $y > ax^2 + bx + c$. • Modelan situaciones de cambio cuadrático de la vida cotidiana y de las ciencias, por medio de la función cuadrática.
OA 4 Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas de la forma: • $ax^2 = b$ • $(ax + b)^2 = c$ • $ax^2 + bx = 0$ • $ax^2 + bx = c$ (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$).	• Relacionan ecuaciones cuadráticas con sus funciones cuadráticas correspondientes. • Resuelven gráficamente las ecuaciones cuadráticas determinando las intersecciones del gráfico con el eje x. • Resuelven algebraicamente las ecuaciones cuadráticas mediante varios métodos, como factorizar, completar al cuadrado y aplicar la fórmula. • Identifican y representan casos en los cuales la ecuación cuadrática tiene una sola o ninguna solución. • Modelan problemas geométricos, de la vida cotidiana, de ciencias naturales y sociales, mediante ecuaciones cuadráticas.

UNIDAD 2	
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	INDICADORES DE EVALUACIÓN
Se espera que las y los estudiantes sean capaces de:	Los y las estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA 5 Mostrar que comprenden la inversa de una función: • Utilizando la metáfora de una máquina. • Representándola por medio de tablas y gráficos, de manera manual y/o con *software* educativo. • Utilizando la reflexión de la función representada en el gráfico en un plano cartesiano. • Calculando las inversas en casos de funciones lineales y cuadráticas.	• Elaboran tablas de valores de una función y de su inversa, reconociendo el intercambio de los valores en los pares (x,y). • Representan una función de manera concreta (metáfora de máquinas, gráficos, etc.) y representan de manera adecuada la función inversa (máquinas que funcionan en sentido contrario, reflexiones del gráfico, etc.). • Conjeturan sobre la reflexión en la recta $y = x$ para obtener la inversa de una función. • Determinan las ecuaciones de las funciones inversas de funciones lineales y cuadráticas. • Reconocen la función inversa de una función dada, en representaciones pictóricas y simbólicas. • Resuelven problemas de la vida cotidiana y de otras ciencias, que involucren el concepto de la función inversa.

SUGERENCIAS DE ACTIVIDADES

Objetivos de Aprendizaje

OA 3

Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$):

- **Reconociendo la función cuadrática $f(x) = ax^2$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas.**
- **Representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con *software* educativo.**
- **Determinando puntos especiales de su gráfica.**
- **Seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda.**

Observaciones a la o el docente

Este objetivo de aprendizaje plantea, para todas las actividades a continuación, que las alumnas y los alumnos apliquen la función cuadrática en situaciones de la vida diaria y en otras asignaturas. Podrán trabajar en parejas o pequeños grupos. Se sugiere que el profesor o la profesora los motive a buscar y probar estrategias aprendidas y propias para solucionarlas, a compartir, respetar y valorar las opiniones de otros y otras, y a trabajar en lo posible en forma autónoma y sin supervisión, aplicando las habilidades del pensamiento matemático. (OA A y OA D)

Actividades

Modelar

Utilizar un lenguaje funcional para resolver problemas y representar fenómenos cotidianos y científicos. (OA h)

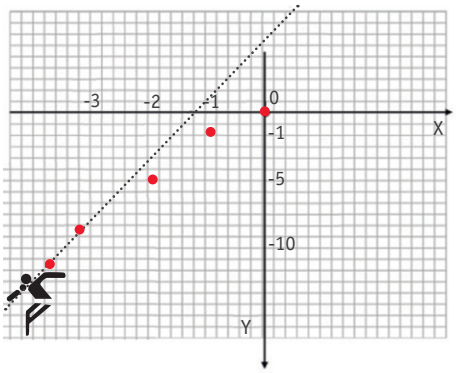
1. En la imagen se muestra la curva balística de varios chorros de agua saliendo de una entrada de agua (tobera).

- Describen la forma de los chorros de agua.
- Responden: ¿Los chorros son parte de una circunferencia o no? Explican y comunican sus respuestas.
- ¿Hay evidencias de simetría? Mencionan posibles ejes.

2. En el sistema cartesiano de coordenadas, se muestra el esquema de un lanzamiento de la bala, propio de las pruebas olímpicas de atletismo. La línea punteada indica en qué dirección sale la bola de acero desde la mano. Las bolas de color rojo muestran su posición en distintas fases de la curva balística. De una posición a la otra, transcurre el mismo tiempo.

Modelar

Utilizar un lenguaje funcional para resolver problemas y representar fenómenos cotidianos y científicos. (OA h)



- Comparan las alturas de las bolas de acero en todas las posiciones, hasta el punto máximo, y anotan las ordenadas respectivas. Identifican y analizan lo que les llama la atención.
- Completan el gráfico en la parte de la caída de la bola, basándose en las observaciones de la actividad anterior.
- Responden: ¿Cómo crecen, en dicha parte, las distancias del eje x? La variable "x" representa una unidad arbitraria de tiempo, y la variable "y" representa una unidad arbitraria de longitud.
- ¿Cuál de las tres funciones representa la curva balística de la bola? Elaboran las tablas de valor y comparan las coordenadas de la bola.
  - $y = -x^2$
  - $y = x^2$
  - $y = -\frac{1}{4}x^2$

® **Educación Física y Salud OA 1 de 2° medio.**

3. Dada la función cuadrática, mediante su ecuación $y = \frac{1}{2}x^2$, los y las estudiantes:
   - Conjeturan acerca de la forma y la posición del gráfico en el sistema cartesiano de coordenadas, basándose en los resultados de la actividad anterior.
   - Elaboran la tabla de valores de la función.
   - Confeccionan el gráfico de la función en el sistema cartesiano de coordenadas y comparan el gráfico con la conjetura.
   - Determinan el valor mínimo de la función. Responden en qué parte de la función se encuentra el punto que corresponde al valor mínimo.
   - ¿Existe un valor máximo? Explican y comunican sus respuestas.

Argumentar y comunicar

Describir relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos. (OA d)

Representar

Elegir y elaborar representaciones e identificar sus límites y su validez. (OA l)

Observaciones a la o el docente

Se sugiere usar tecnologías y *softwares* que ayuden a visualizar las gráficas de la función cuadrática y de las diferentes posiciones que podría tener en el plano, determinando las condiciones sobre las variables de la ecuación cuadrática.

Se sugiere utilizar algún *software* educativo para realizar gráficas, como el Winplot, que se puede descargar desde http://www.softonic.com/s/para-graficar-funciones-matematicas

También se puede trabajar con programas de gráficas en línea, como los siguientes:

- http://fooplot.com/?lang=es#W3sidHlwZSI6MCwiZXEiOiJ4XjIiLCJjb2xvciI6IiMwMDAwMDAifSx7InR5cGUiOjEwMDB9XQ--
- http://www.disfrutalasmatematicas.com/graficos/grafico-funciones.php
- http://wolframalpha0.blogspot.com/2012/09/como-graficar-funciones-online.html
- http://www.onlinefunctiongrapher.com/

A este nivel, es necesario fomentar aún más y periódicamente que los alumnos y las alumnas aborden de modo flexible y creativo la búsqueda de soluciones a los problemas planteados, usando estrategias conocidas o creando tácticas propias. (OA A)

Argumentar y comunicar

Describir relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos. (OA d)

Representar

Elegir y elaborar representaciones e identificar sus límites y su validez. (OA l)

4. Dada la función cuadrática, mediante su ecuación $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$, las alumnas y los alumnos:

   a. Conjeturan acerca de la forma y la posición del gráfico, comparándolo con el gráfico de la función $y = \frac{1}{2}x^2$.

   b. Elaboran una tabla de valores y confeccionan el gráfico correspondiente. Afirman o rechazan la conjetura.

   c. Responden: ¿Cómo se cambia la posición de la función $y = \frac{1}{2}x^2$? Comparan con los gráficos de las siguientes funciones y con las coordenadas de los vértices:

   - $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$
   - $y = \frac{1}{2}x^2 + 1{,}5$
   - $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$

   d. Dados los vértices de los gráficos de funciones del tipo $y = \frac{1}{2}x^2 + c$, determinan las ecuaciones correspondientes:

   - S(0,-2)
   - S(0, $\frac{3}{4}$)
   - S(0,5)

5. Una motocicleta de carrera tiene una aceleración de $a = 12\ \frac{m}{s^2}$. La ecuación funcional que describe cómo aumenta el recorrido y con el tiempo x es la siguiente: $y = \frac{1}{2}\ a\ x^2$.

Representar

Elegir y elaborar representaciones e identificar sus límites y su validez. (OA l)

Conjeturan acerca de la forma del gráfico de la función mencionada.

- Elaboran la tabla de valores de la función:

Tiempo x en segundos	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Recorrido y en metros									

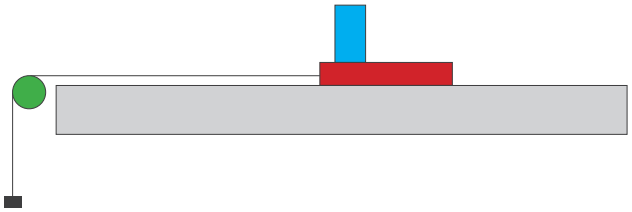
- Confeccionan el gráfico de la función según los datos de la tabla de valores.
- Responden cómo se aumenta el recorrido si se duplica (triplica, cuadruplica) el tiempo.

® **Ciencias Naturales OA 9 de 2° medio.**

6. En un experimento físico de mecánica, se miden el tiempo y el recorrido de un movimiento rectilíneo constantemente acelerado. Las medidas redondeadas se presentan en la tabla de valores. Se sabe que el recorrido depende cuadráticamente del tiempo.

Representar

Elegir y elaborar representaciones e identificar sus límites y su validez. (OA l)



Tiempo x en segundos	0	2	4	6	8
Recorrido y en cm	0	6	24	53	96

- Elaboran el gráfico de la función cuadrática representada por tabla de valores.
- Determinan la forma $y = ax^2$ de la ecuación del movimiento, utilizando las coordenadas de los puntos del gráfico.
- ¿Cuál de los puntos no corresponde correctamente al gráfico? Explican y comunican la respuesta.

Observaciones a la o el docente

Para fomentar el trabajo en equipo, se puede relacionar esta actividad con un proyecto de Física, en el cual alumnos, alumnas, profesoras y profesores recrean el movimiento rectilíneo y anotan datos, que pueden ser graficados, comparados y compartidos, para obtener la ecuación del movimiento rectilíneo.

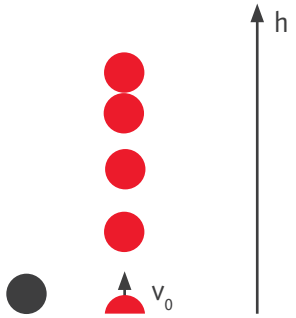
Se sugiere fomentar el respeto y la valoración de las opiniones y los logros del propio grupo y de los y las demás. Además, en estas instancias se deben respetar las reglas y los plazos en los trabajos y en las metodologías. (OA D)

® **Ciencias Naturales OA 9 de 2° medio.**

Representar

Elegir y elaborar representaciones e identificar sus límites y su validez. (OA l)

7. En un lanzamiento vertical hacia arriba, la altura máxima depende cuadráticamente de la rapidez inicial. Se determina aproximadamente la altura máxima según la ecuación $h = \frac{1}{20} v_0^2$, en la cual la variable h representa la altura máxima y la variable v_0, la rapidez inicial.



- Completan tabla de valores de la función cuadrática con la ecuación $h = \frac{1}{20} v_0^2$.

Rapidez v_0 en $\frac{m}{s}$	0	5	10	15	20
Altura máxima en m	0				

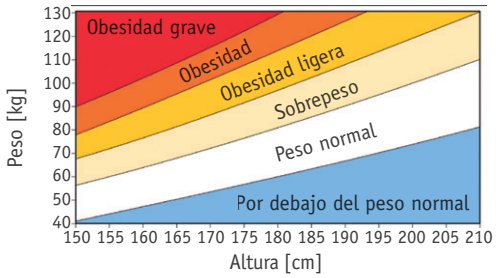
- Elaboran el gráfico de la función con los valores de la tabla.
- Determinan gráficamente la rapidez inicial que lleva a una altura máxima de 10 m.
- Calculan la rapidez inicial que lleva a una altura máxima de 5 m.

® **Ciencias Naturales OA 9 de 2° medio.**

8. Para el peso normal de una persona, el Índice de Masa Corporal (IMC) debe tener un valor de 23, y para un sobrepeso leve, un valor de 27. El IMC se calcula según la fórmula IMC = $\frac{m}{x^2}$, en la cual la variable m representa la masa en kg y la variable x, la altura en metros.

Representar

Elegir y elaborar representaciones e identificar sus límites y su validez. (OA l)



- Desarrollan la fórmula de la función que permite calcular la masa que puede tener una persona según su altura, y el IMC deseado.
- Completan la tabla de valores de las funciones con los IMC de 23 y 27.

Altura en metros	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95
Masa en kg (IMC = 23)							
Masa en kg (IMC = 27)							

- Confeccionan el gráfico de ambas funciones en el mismo sistema cartesiano de coordenadas.
- Determinan gráficamente las calificaciones "bajo peso normal", "entre peso normal y sobrepeso leve" y "sobre el sobrepeso leve", para los hombres con las siguientes características:
  - A (1,73m/76,4kg).
  - B (1,81m/ 88,2kg).
  - C (1,69m/62,4kg).

® **Ciencias Naturales OA 5 de 8° básico.**

9. La energía cinética de una masa en movimiento depende de su rapidez. En la tabla se registra la energía cinética de un auto con masa m = 1 000 kg en dependencia de su velocidad.

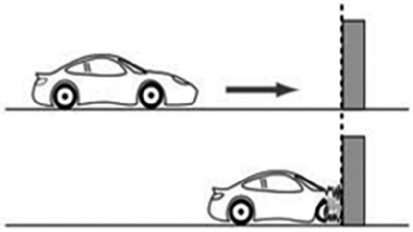
Representar

Elegir y elaborar representaciones e identificar sus límites y su validez. (OA l)

Velocidad en km/h	0	18	36	54	72	90	108
Velocidad en m/s	0	5	10	15	20	25	30
Energía en kJoule	0	25	100	225	400	625	900

- ¿Por qué la dependencia de la energía de la masa no es una función lineal? Explican y comunican la respuesta.

- Elaboran el gráfico de la función en un sistema cartesiano de coordenadas. El eje horizontal representa la velocidad x en $[\frac{m}{s}]$ y el eje vertical representa la energía y en [Joule].
- Determinan la ecuación de la función entre energía y rapidez.
- ¿Con qué factor debe aumentar la rapidez para que la energía sea el doble?
- En el choque de un auto con un obstáculo firme, se libera toda la energía. ¿Cuántas veces más grande es la energía liberada si un auto choca con 72 km/h en vez de 36 km/h?



® **Ciencias Naturales OA 9 y OA 12 de 2° medio.**

Modelar

Ajustar modelos, acercándolos a la realidad. (OA j)

10. Una miniempresa se especializa en instalar sistemas de energía solar para casas particulares. La ganancia y en unidades técnicas monetarias (UTM) depende de varios factores que llevan a una función con la ecuación de $y = x^2 - 240x + 8\,000$, en la cual la variable x representa la cantidad de sistemas instalados.

- Completan la tabla de valores de la función.

x	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240
y													

- Elaboran el gráfico de la función de ganancia en un sistema cartesiano de coordenadas.
- Determinan la ganancia máxima.
- Interpretan y comunican los valores 0 y negativos.

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA 20 de 1° medio.**

Objetivos de Aprendizaje

OA 4

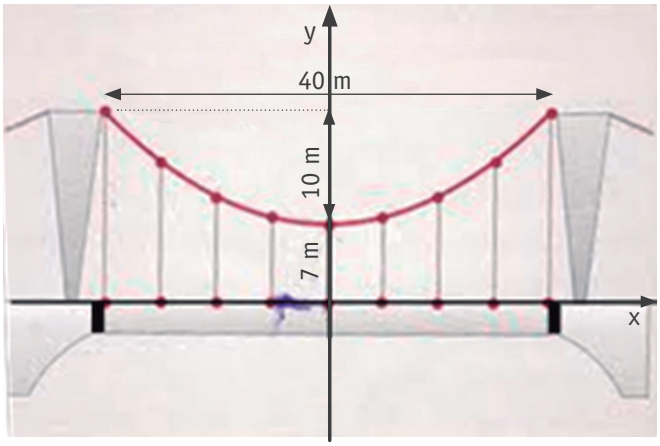
Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas de la forma:

- $ax^2 = b$
- $(ax + b)^2 = c$
- $ax^2 + bx = 0$
- $ax^2 + bx = c$ **(a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)**

Actividades

1. Si se prolonga un lado de un cuadrado en 2 cm y se acorta el otro lado en 2 cm, se obtiene un rectángulo con un área de 45 cm^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado inicial?
   - Confeccionan un bosquejo que represente el problema.
   - Elaboran la ecuación cuadrática con la cual se puede determinar la resolución.
   - Resuelven la ecuación; eligen la resolución que corresponde.
   - Realizan la prueba de la resolución.

2. En la imagen se muestra el dibujo técnico de un puente colgante. Los 9 cables verticales de soporte de acero tienen una distancia de 5 m entre ellos.



   - Determinan el factor a de la función $y = ax^2 + c$ mediante una ecuación cuadrática y verificar si "la curva roja" del puente colgante puede ser descrita o no por una ecuación cuadrática.
   - Elaboran, en el sistema cartesiano de coordenadas, la ecuación que representa el cable de soporte que forma una parábola.
   - Calculan los largos de los cables verticales de soporte; eligen la resolución que corresponde.

Resolver problemas
Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)

Resolver problemas
Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

Modelar
Utilizar un lenguaje funcional para resolver problemas y representar fenómenos cotidianos y científicos. (OA h)

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

3. Un estadio griego de la Antigüedad tenía la forma de un rectángulo, cuyo largo era 6 veces más grande que el ancho. El área del estadio medía aproximadamente 6 150 m^2.

- Responden cuánto medían el largo y el ancho del estadio griego.
- Confeccionan un bosquejo que represente el problema; eligen una variable para elaborar una ecuación.
- Elaboran la ecuación cuadrática con la cual se puede determinar la resolución.
- Resuelven la ecuación cuadrática y redondean el resultado a metros completos; eligen la resolución que corresponde.
- Realizan la prueba de la resolución.

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA 8 de 7° básico.**

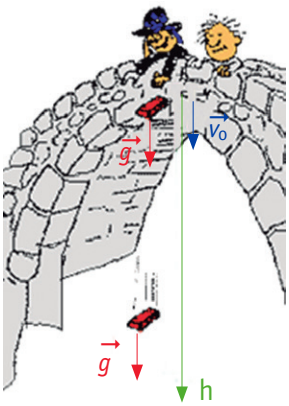
Modelar

Utilizar un lenguaje funcional para resolver problemas y representar fenómenos cotidianos y científicos. (OA h)

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

4. Si se lanza un objeto verticalmente, con la rapidez inicial v_0 hacia abajo, el objeto se mueve aproximadamente con la siguiente ecuación: $y = 5x^2 + v_0 \cdot x$.



La variable x representa el tiempo en segundos que transcurre a partir del lanzamiento, mientras que la variable y representa el recorrido de la caída. ¿Cuánto tiempo dura la caída si se lanza el objeto con la rapidez $v_0 = 15\ \frac{m}{s}$ desde una altura de 20 m?

- Elaboran la ecuación para resolver el problema.
- Resuelven la ecuación y eligen la resolución que corresponde.
- Realizan la prueba de la resolución.

Observaciones a la o el docente

Completando cuadrados se puede evitar usar una fórmula en el problema siguiente.

Se sugiere que los alumnos y las alumnas apliquen estrategias ya aprendidas o desarrollen tácticas propias para obtener soluciones de las ecuaciones. (OA A)

® **Ciencias Naturales OA 9 de 2° medio.**

5. Resuelven las siguientes ecuaciones cuadráticas. Si es posible, no aplican la fórmula:

Resolver problemas
Utilización de estrategias avanzadas. (OA a)

- $5x^2 = 60x$
- $4x^2 - 12x + 9 = 0$
- $2x^2 + 12x + 10 = 0$
- $x^2 + 6x + 9 = 1$
- $(x + 25)^2 = 111x - 275$
- $(x - 4) \cdot (x + 1{,}5) = 0$

6. Las siguientes ecuaciones cuadráticas tienen una constante k de la cual depende la existencia y el número de soluciones. ¿Para qué valores de k existen 2 soluciones, exactamente 1 solución o ninguna solución?

Resolver problemas
Utilización de estrategias avanzadas. (OA a)

- $x^2 + 4x + 2k = 0$
- $2x^2 + 6x - 3k = 0$
- $x^2 + kx + \frac{1}{4} = 0$

Observaciones a la o el docente

En la actividad 6 se definen las soluciones por la discriminante $D = b^2 - 4ac$, que se refiere a la forma de la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$.

Por ejemplo: $x^2 - x - k = 0$ con la discriminante $D = 1 + 4k$

- para $1 + 4k \geq 0$ ($k \geq -\frac{1}{4}$) existen 2 soluciones;
- para $k = -\frac{1}{4}$ hay exactamente 1 solución;
- y para $k < -\frac{1}{4}$ no hay solución.

Se sugiere que las alumnas y los alumnos trabajen en parejas y que escuchen los planteamientos recíprocamente, para resolver las siguientes actividades y problemas. (OA A)

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

7. Un auto de masa m = 1 000 kg viaja con rapidez = 108 $\frac{km}{h}$. La energía cinética se calcula según la fórmula $E = mv^2$.
   - Transforman la rapidez del auto de km/h en la rapidez expresada en $\frac{m}{s}$.
   - Determinan la energía cinética del auto y la expresan en kJoule.
   - ¿Con qué rapidez debe viajar otro auto de masa m = 1 250 kg para tener la misma energía cinética? Elaboran la ecuación con la cual se puede resolver el problema.
   - Resuelven la ecuación y expresan la rapidez en $\frac{m}{s}$ y en $\frac{km}{h}$ aproximada a la primera decimal.

® **Ciencias Naturales OA 9 de 2° medio.**

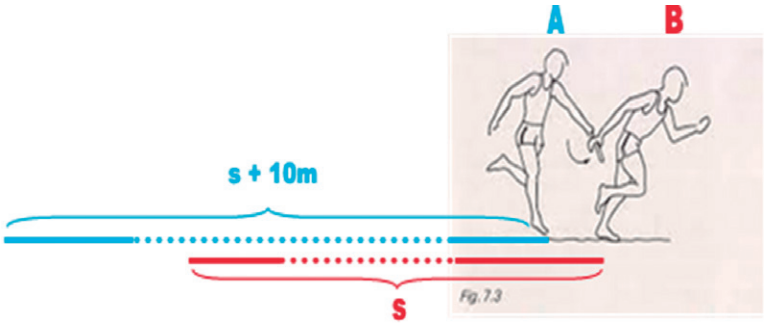
Modelar

Ajustar modelos acercándolos a la realidad. (OA j)

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

8. En la carrera de relevos 4 x 100 m, el corredor A se acerca con la rapidez constante v al corredor B. En el momento del traspaso del relevo, el corredor B debe tener aproximadamente la misma rapidez v que el corredor A. Para lograr esta condición, el corredor B parte 10 m adelante del corredor A, con aceleración constante a. A partir del momento del traspaso del relevo, el corredor B ha terminado la aceleración y sigue corriendo con rapidez constante. La ecuación del movimiento del corredor A se expresa con la ecuación: $s + 10 = v \cdot t$. El movimiento del corredor B se determina con la ecuación: $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$. Se busca el tiempo t que transcurre desde la partida del corredor B hasta la recepción del relevo.



   - La rapidez del corredor A tiene el valor de 10 $\frac{m}{s}$ y la aceleración a del corredor B tiene el valor de 4,8 $\frac{m}{s^2}$. Escriben con estos datos las ecuaciones de los movimientos de ambos corredores.
   - Despejan ambas ecuaciones a la variable s.
   - Elaboran la ecuación cuadrática que resulta por igualar ambas ecuaciones.
   - Resuelven la ecuación cuadrática.
   - Conjeturan acerca de cuál de las soluciones representa más la realidad.
   - Calculan el recorrido s del corredor B y deciden cuál de las soluciones es la más adaptada a la realidad.

Observaciones a la o el docente

La actividad 8 es un desafío. Los alumnos y las alumnas deben recordar el método de igualación de dos ecuaciones que se aplica en la solución de sistemas de ecuaciones. Con los datos de la rapidez y de la aceleración a, se obtiene la ecuación cuadrática $2{,}4\,t^2 - 10t + 10 = 0$. Las soluciones son $t_1 = 2{,}5$ y $t_2 = 1{,}7$. Con la solución $t_1 = 2{,}5$ s, el corredor B recorre 15 m hasta traspasar el relevo; y con la solución $t_2 = 1{,}7$ s, recorre 6,9 m. Eso significa que la solución t_1 representa más la realidad. Los datos de $v = 10\,\frac{m}{s}$ y de $a = 4{,}8\,\frac{m}{s^2}$ son para atletas de alto rendimiento de nivel mundial. No es necesario que en las ecuaciones o en los cálculos mencionen las unidades m, $\frac{m}{s}$ y $\frac{m}{s^2}$.

Se recomienda realizar un proyecto con trabajo en grupos, dentro de las clases de Matemática; las y los estudiantes pueden adaptar la actividad al nivel deportivo de alumnos o alumnas de un 2º medio.

En este ejercicio, tienen que compartir, obedecer y asumir responsabilidades; manejar una buena forma de convivencia –lo que significa respetar y valorar las opiniones y logros de otros y otras–, y aprender a cumplir reglas y plazos. (OA D)

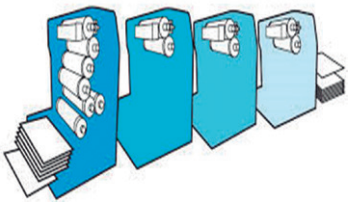
® **Ciencias Naturales OA 11 de 2° medio.**

® **Educación Física y Salud OA 2 de 2° medio.**

9. En la producción de un artículo se cuenta con una función lineal que describe los gastos, y una función cuadrática que describe los ingresos. Si los ingresos superan a los gastos, la producción entra en la fase de las ganancias. La función de los gastos en unidades de dinero se expresa con la ecuación $g(x) = 25x + 2\,000$. La función de los ingresos en las mismas unidades de dinero se expresa como $i(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 85x$. Para ambas funciones, la variable x representa el número de artículos producidos.

Modelar

Identificar si un cambio es cuadrático o porcentual constante, y seleccionar el modelo adecuado. (OA i)



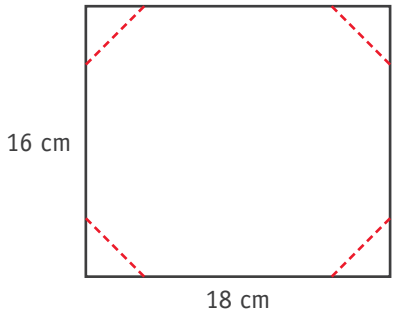
- Elaboran la ecuación que describe las ganancias.
- Determinan la cantidad x_1 a partir de la cual la producción entra en la fase de las ganancias, y la cantidad x_2 a partir de la cual la producción sale de la fase de las ganancias.
- Determinan la cantidad x_3 que lleva a la ganancia máxima.

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA 20 de 1° medio.**

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)

10. El dibujo muestra un rectángulo de 18 cm de largo y 16 cm de ancho. En las cuatro esquinas se recorta el mismo triángulo isósceles, de modo que el octágono restante tenga un área reducida en un 25 %. ¿Cómo se deben elegir las medidas de los triángulos recortados?



- Elaboran una ecuación cuadrática que resuelve el problema.
- Resuelven la ecuación.
- Realizan la prueba de los resultados.

Objetivos de Aprendizaje

OA 5

Mostrar que comprenden la inversa de una función:

- **Utilizando la metáfora de una máquina.**
- **Representándola por medio de tablas y gráficos, de manera manual y/o con *software* educativo.**
- **Utilizando la reflexión de la función representada en el gráfico en un plano cartesiano.**
- **Calculando las inversas en casos de funciones lineales y cuadráticas.**

Observaciones a la o el docente

Se sugiere utilizar algún *software* educativo para realizar gráficas; por ejemplo, el Winplot, que se puede descargar desde http://www.softonic.com/s/para-graficar-funciones-matematicas

También se puede trabajar con programas de gráficas en línea, como las siguientes:

› http://fooplot.com/?lang=es#W3sidHlwZSI6MCwiZXEiOiJ4XjIiLCJjb2xvciI6IiMwMDAwMDAifSx7InR5cGUiOjEwMDB9XQ--

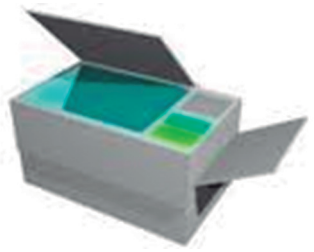
› http://www.disfrutalasmatematicas.com/graficos/grafico-funciones.php

› http://wolframalpha0.blogspot.com/2012/09/como-graficar-funciones-online.html

› http://www.onlinefunctiongrapher.com/

Actividades

1. Existen máquinas o aparatos que pueden funcionar "al revés"; por ejemplo: una fotocopiadora amplía y reduce originales; algunos motores pueden girar en dos sentidos; hay bombas que aumentan y bajan la presión; y acondicionadores de aire que aumentan y bajan la temperatura, etc.



- Completan la siguiente tabla con las "funciones o funciones inversas" de las máquinas:

MÁQUINA	FUNCIÓN DIRECTA DE LA MÁQUINA	FUNCIÓN INVERSA DE LA MÁQUINA
Escáner	Amplía al cuádruple	
Bomba		Aumenta la presión por 1,5 bar
Acondicionador del aire		Baja la temperatura por 12°C
Bomba	Reduce la presión a la mitad	
Motor de un ascensor		Baja la cabina por 10 m

- Completan la tabla con el término algebraico de la función inversa y después responden qué debe resultar si se aplica la función f y al resultado se aplica la función inversa f^{-1}.

VARIABLE	FUNCIÓN f	FUNCIÓN INVERSA f^{-1}	f o f^{-1}	RESULTADO
x	$x \rightarrow 2x$	$x \rightarrow \frac{1}{2}x$	$x \rightarrow \frac{1}{2} \cdot (2x)$	
x	$x \rightarrow \frac{1}{4}x$			
x	$x \rightarrow 3x - 1$			
x	$x \rightarrow -\frac{1}{2}x + 1$			
x	$x \rightarrow x^2$			
x	$x \rightarrow \sqrt{x}$			

Representar

Ejemplificar representaciones con analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas. (OA n)

Observaciones a la o el docente

La introducción de la compuesta de dos funciones se puede trabajar antes de esta actividad, pero no como contenido por evaluar, sino en relación con la función inversa, y compararla con la multiplicación y los inversos multiplicativos; es decir, como una operación análoga a la multiplicación.

Se sugiere aplicar estrategias conocidas para obtener una solución y para entender conceptos, utilizando nociones básicas de la Matemática. Por último, se debe discutir en cada caso particular el dominio de las funciones para identificar la función inversa correspondiente. (OA A)

Resolver problemas

Utilización de estrategias avanzadas. (OA a)

2. Determinan la ecuación de la función inversa por el recambio de las variables en la ecuación funcional original, despejando la variable y de esta ecuación.

TIPO DE FUNCIÓN	FUNCIÓN DIRECTA	FUNCIÓN INVERSA
Lineal	$y = 2x$	
Lineal		$y = -\frac{2}{3}x$
Afín	$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$	
Afín		$y = 0{,}2x + 1$
Cuadrática / raíz cuadrada	$y = \frac{1}{4}x^2$	
Raíz cuadrada / cuadrática	$y = \sqrt{3x}$	
Cuadrática / raíz cuadrada		$y = 2\sqrt{5x}$
Raíz cuadrada / cuadrática		$y = 0{,}01x^2$
Función constante	$y = 2$	

Observaciones a la o el docente

Por ejemplo: si la función es $y = 3x$, primero se hace un cambio de variables $x = 3$, y a continuación se despeja la variable y; es decir $y = \frac{x}{3}$.

Se sugiere cambiar las variables antes de despejar la variable, y se recomienda no hacerlo al final, ya que esto evita confusiones al momento de decidir cuál variable es la que se debe despejar. Por último, se debe discutir en cada caso particular el dominio de las funciones para identificar la función inversa correspondiente.

3. Determinan las ecuaciones de las funciones si se aplica iteradas veces el proceso de invertir la función.
   - Conjeturan acerca del resultado del trabajo de una máquina que invierte dos veces el proceso de su función. Por ejemplo: una bomba duplica la presión en un recipiente.
   - Conjeturan acerca de la inversa de la inversa de una función.
   - Determinan la ecuación de la inversa de la inversa de una función, aplicando dos veces el proceso algebraico de la inversión.
     - $y = -\frac{1}{2}x + 1$
     - $y = 5x^2$
   - ¿Qué función resulta si se aplica la inversión iteradas veces (número par o impar)? Explican y comunican la respuesta.

Argumentar y comunicar

Explicar procedimientos de soluciones propias, demostraciones de resultados y conectores. (OA e)

4. Se aumenta el precio de un producto por un porcentaje y después se rebaja el precio aumentado por el mismo porcentaje.
   - Conjeturan acerca de si estos procesos de aumento y rebaja son procesos inversos.
   - Afirman o rechazan la conjetura mediante un ejemplo concreto.

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA 20 de 1° medio.**

Argumentar y comunicar

Explicar procedimientos de soluciones propias, demostraciones de resultados y conectores. (OA e)

5. Representan los gráficos de la función afín f: $y = 2x - 3$, y de su inversa en el mismo sistema cartesiano de coordenadas.
   - Determinan la ecuación de la función inversa f^{-1}.
   - Dibujan los gráficos de la función y de su inversa, sin elaborar tablas de valores.
   - Comparan ambos gráficos y conjeturan acerca de una posible transformación geométrica entre ambos gráficos.
   - Responden por qué la inversa de una función constante no es función. Explican sus respuestas mediante el gráfico de una función constante.

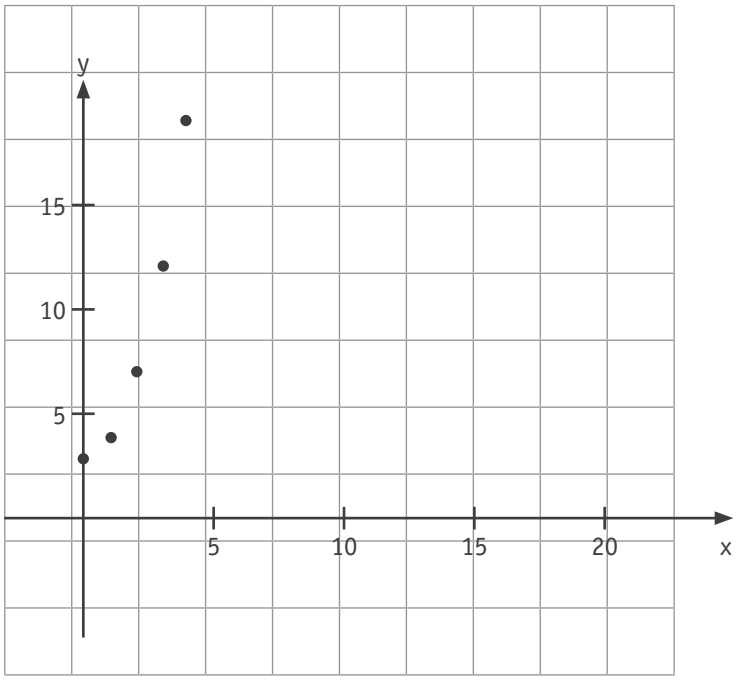
Representar

Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos. (OA m)

Representar

Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos. (OA m)

6. En el sistema cartesiano de coordenadas están marcados cinco puntos que pertenecen a una función cuadrática.



- Determinan la ecuación de la función representada.
- Confeccionan el gráfico de la función inversa sin elaborar la ecuación respectiva.
- Determinan la ecuación de la función inversa sobre la base del gráfico confeccionado.
- Determinan el rango de la función inversa y lo comprueban con el gráfico.

Representar

Elegir y elaborar representaciones e identificar sus límites y su validez. (OA l)

7. Se somete una función a los siguientes procesos iteradas veces: Primero se la convierte en la función inversa. Segundo, se traslada su gráfico por una unidad positiva en la dirección del eje "y", obteniendo otra función. A esa función se aplica el mismo proceso, etc. Se empieza con la función lineal con la ecuación $y = 2x$, y se realiza tres veces el proceso mencionado.
   - Determinan algebraicamente la ecuación de la función después de tres aplicaciones.
   - Representan todo el procedimiento con los gráficos respectivos.

8. ¿Cuáles de las funciones no tienen una función inversa y cuáles se tienen a sí mismas como función inversa? Explican y comunican la respuesta mediante las ecuaciones funcionales.

- $y = -\frac{1}{2}x$
- $y = 4x$
- $y = 2$
- $y = x$
- $y = 0$

Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)

9. En un proceso de crecimiento lineal, una magnitud crece 2 unidades de una unidad a la otra. ¿Cuál sería el proceso matemáticamente inverso? Verifican o rechazan las propuestas mediante la elaboración de las ecuaciones funcionales.

- La magnitud disminuye 2 unidades de una unidad a la otra.
- La magnitud crece 1 unidad de una unidad a la otra.
- La magnitud crece media unidad de una unidad a la otra.

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)

10. Un auto de carrera se mueve en la fase de la partida con una aceleración constante de $a = 5\frac{m}{s^2}$. La función que describe el movimiento rectilíneo con aceleración constante tiene la ecuación $y = \frac{1}{2}ax^2$, en la cual la variable "y" representa el recorrido desde la partida, y la variable "x" representa el tiempo transcurrido.

- Escriben la ecuación del movimiento sin mencionar las unidades.
- Elaboran el gráfico de la función que representa el movimiento, para los primeros 6 segundos del movimiento.
- Construyen el gráfico de la función inversa a la función anterior.
- Verifican que la ecuación $y = \sqrt{0{,}4x}$ representa la función inversa, en la cual variable "y" representa el tiempo y la variable "x" representa el recorrido.

® **Ciencias Naturales OA 9 de 2° medio.**

Modelar

Utilizar un lenguaje funcional para resolver problemas y representar fenómenos cotidianos y científicos. (OA h)

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)

SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN

EVALUACIÓN 1

Objetivos de Aprendizaje

OA 3

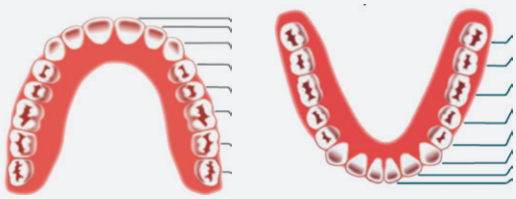
Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$):

- **Reconociendo la función cuadrática $f(x) = ax^2$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas.**
- **Representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con *software* educativo.**
- **Determinando puntos especiales de su gráfica.**
- **Seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda.**

Indicadores de Evaluación

- Analizan las variaciones de la gráfica mediante diferentes medios de representación.
- Marcan y encuentran numéricamente la intersección de la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, con el eje x.
- Modelan situaciones de cambio cuadrático por medio de la función cuadrática.

EVALUACIÓN 1

ACTIVIDAD	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
Trabajo grupal: **1.** Buscan una función aproximada que describa una rampa de patineta o *skate*, como la que se muestra en la siguiente figura: • Comparan con rampas más grandes y estiman la rapidez con que llegan al mínimo. Utilizan la fórmula de rapidez $\sqrt{g \cdot h^2}$, donde g es la constante de gravedad 9,8 y h es la altura. • Determinan aproximadamente la función cuadrática que describe una curva que alcanza la rapidez de 10 metros por segundo. **2.** Una dentadura regular tiene aproximadamente la forma de una parábola, como se aprecia en las figuras:  • Elaboran gráficos para estas dentaduras ideales, considerando que la distancia entre los últimos molares es de 12 cm. • Moldean con yeso (especial para moldear dientes) su propia dentadura. • Elaboran un gráfico que represente su propia dentadura. • Finalmente las comparan con la dentadura ideal y con las de sus compañeros y compañeras, identificando coincidencias.	• Utilizan medidas reales para elaborar el gráfico de la rampa de *skate* y para las dentaduras. • Buscan rampas de otros tamaños y averiguan sobre las formas de rampas de *skate* y algunas historias sobre su construcción. • Modelan su propia dentadura. • Construyen (si es posible) una pequeña rampa de *skate*. • Comparan la rampa pequeña con otras más grandes, tanto en su ecuación como en el gráfico. • Comparan la dentadura ideal con las suyas, identificando coincidencias. • Calculan las velocidades con que se llega al punto mínimo de las diferentes rampas. • Determinan la función cuadrática que describe una curva con la cual se alcanza una velocidad de 10 metros por segundo en el punto mínimo.

EVALUACIÓN 2

Objetivos de Aprendizaje

OA 4

Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas de la forma:

- $ax^2 = b$
- $(ax + b)^2 = c$
- $ax^2 + bx = 0$
- $ax^2 + bx = c$

(a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)

Indicadores de Evaluación

- Determinan los ceros de la función relacionada con la ecuación.
- Identifican en el gráfico las intersecciones con el eje x, con las raíces de la ecuación.
- Denominan los ceros de la función cuadrática como las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y de las otras formas sencillas.
- Resuelven problemas rutinarios y en contexto, que involucren algunas de estas ecuaciones.
- Relacionan la gráfica de la función con la solución de la ecuación y los ceros de la función.

ACTIVIDAD	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
Esta actividad se presta para hacer un proyecto. Los alumnos y las alumnas consideran la siguiente imagen para determinar: • La altura del salto. • Los metros recorridos desde la altura máxima del salto hasta la llegada. • La altura del deportista cuando ha recorrido 1 metro después de haber alcanzado la altura máxima del salto. **Observaciones a la o el docente** Este problema puede ser resuelto considerando que la altura del deportista fluctúa entre valores reales de 1,75 m y 1,80 m. Otro dato que se debe considerar es que el muro que comienza en el eje x, marcado en la imagen, es de un metro, aproximadamente.	• Determinan la altura del salto por estimación de las medidas de objetos que están en la imagen. • Estiman el recorrido entre el inicio del salto y el final del mismo. • Reconocen que la altura máxima del salto corresponde al valor de b de la ecuación $y = -ax^2 + b$. • Con las estimaciones, determinan el valor de a de la ecuación $y = -ax^2 + b$. • Calculan la altura del deportista cuando ha recorrido 1 metro después de haber alcanzado la altura máxima del salto. • Reconocen que a estas medidas de altura se les puede agregar la altura del edificio.

EVALUACIÓN 3

Objetivos de Aprendizaje

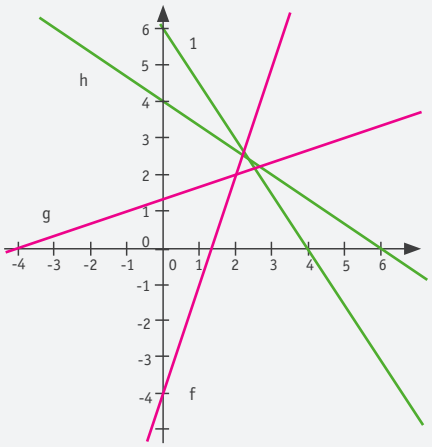
OA 5

Mostrar que comprenden la inversa de una función:

- **Utilizando la metáfora de una máquina.**
- **Representándola por medio de tablas y gráficos, de manera manual o con *software* educativo.**
- **Utilizando la reflexión de la función representada en el gráfico en un plano cartesiano.**
- **Calculando las inversas en casos de funciones lineales y cuadráticas.**

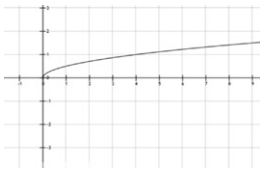
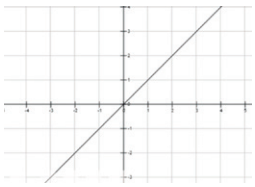
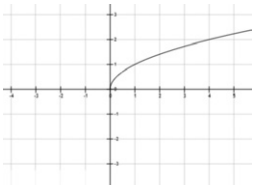
Indicadores de Evaluación

- Representan gráficamente la función y su inversa.
- Conjeturan sobre la reflexión en la recta $y = x$ para obtener una de la otra.
- Reconocen la función inversa de una función dada.
- Reconocen gráficos de funciones inversas.

ACTIVIDAD	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
Se puede registrar el proceso de resolución de esta actividad en el diario de vida matemático. Los alumnos y las alumnas trabajan las siguientes situaciones: **1.** El gráfico muestra cuatro rectas. • Determinan cada una de las funciones asociadas a estas rectas del gráfico.  • Analizan: Si las pudieran unir de dos en dos, ¿qué criterio utilizarían? • Trazan la línea recta correspondiente a la función $y = x$. • Determinan dos características observables entre la recta $y = x$, con los pares de rectas que se tiene de la letra b.	• Determinan la función que representa cada una de las rectas del gráfico. • Utilizan criterios para unir funciones; por ejemplo: creciente, decreciente o inversa. Eventualmente se podrían considerar otros; por ejemplo: lugar donde se intersectan. • Trazan la línea recta que se les indica, de manera adecuada y precisa. • Observan que esta es la única recta que pasa por la intersección de los pares de rectas. • Conjeturan sobre el fenómeno observado con la recta $y = x$. • Relacionan esta recta con el eje de simetría de una función y su función inversa. • Reconocen la función inversa de las funciones presentadas, de manera visual o por medio de algunos cálculos. • Unen la función con su función inversa de manera adecuada.

EVALUACIÓN 3

2. Unen con una línea la función con su función inversa o con el gráfico de su función inversa:

$y = \frac{3}{2}x - 5$	$y = -\frac{5}{3}x + 2$
	$y = \frac{3}{2}x - 6$
$y = -\frac{3}{5}x + \frac{6}{5}$	$y = 4x^2$
$y = x^2$	$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$
$y = \frac{2}{3}x + 4$	$y = x$
	

Semestre

2

UNIDAD 3

PROPÓSITO

En esta unidad, los y las estudiantes analizan situaciones que involucran el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo, y que van de lo gráfico a lo simbólico, identificando dicha razón de cambio en diferentes contextos, como el interés compuesto. En este último caso, se pretende que establezcan el interés o capital final después de cierto tiempo, ya sea estimándolo o calculándolo. Asimismo, que comparen situaciones que involucran el interés simple y compuesto de cierto capital, estableciendo el cambio porcentual e infiriendo el comportamiento de la inversión después de cierto tiempo.

Se espera que aprendan a expresar de forma recursiva el cambio porcentual en situaciones, e inferir el cambio después de cierto tiempo en la resolución de problemas de la vida diaria; y que también sepan modelar situaciones que involucren cambio porcentual, y deducir resultados en intervalos de tiempo. Comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente, por medio de la semejanza de triángulos rectángulos; en esta etapa, se espera que apliquen de forma adecuada cada razón trigonométrica, según sea el contexto.

Usan las razones trigonométricas como medio para determinar la medida de los lados de un triángulo rectángulo, o el ángulo involucrado en el contexto de resolución de problemas, así como también para componer o descomponer vectores y determinar la proyección de un vector sobre otro en el plano cartesiano, estableciendo dicha proyección con su razón trigonométrica correspondiente. En este último caso, se espera que el o la estudiante reconozca de forma intuitiva la razón trigonométrica involucrada.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Porcentaje.
- Potencia.
- Logaritmo.
- Triángulo rectángulo.
- Teorema de Pitágoras.
- Semejanza de triángulos.
- Puntos en el plano cartesiano.

PALABRAS CLAVE

Cambio porcentual, porcentaje, intervalos de tiempo, vector, proyección, razones trigonométricas.

CONOCIMIENTOS

- Cambio porcentual.
- Razones trigonométricas.

HABILIDADES

- Describir relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos. **(OA d)**
- Explicar:
  - Soluciones propias y los procedimientos utilizados.
  - Demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas.
  - Generalizaciones por medio de conectores lógicos y cuantificadores utilizándolos apropiadamente. **(OA e)**
- Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración si hay saltos o errores. **(OA g)**
- Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de estas. **(OA l)**

ACTITUDES

- Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato. **(OA B)**
- Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas. **(OA D)**

UNIDAD 3	
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	INDICADORES DE EVALUACIÓN
Se espera que las y los estudiantes sean capaces de:	Los y las estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA 6 Explicar el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo: • Por medio de situaciones de la vida real y de otras asignaturas. • Identificándolo con el interés compuesto. • Representándolo de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo. • Expresándolo en forma recursiva $f(t+1) - f(t) = a \cdot f(t)$ • Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.	• Modelan un crecimiento o decrecimiento porcentual constante (por ejemplo: de 50 %) con material concreto, como fichas, monedas o palitos. • Identifican el crecimiento o decrecimiento porcentual constante en representaciones gráficas. • Desarrollan la forma recursiva del cambio porcentual constante, a base de datos iniciales. • Resuelven ecuaciones recursivas del cambio porcentual constante en ejercicios rutinarios. • Identifican el cambio constante y el cambio porcentual constante en situaciones reales. • Resuelven problemas de ciencias y de la vida diaria, que involucren el cambio porcentual constante.
OA 8 Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos: • Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos. • Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo. • Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados. • Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.	• Dibujan triángulos rectángulos semejantes y los superponen en uno de sus ángulos para relacionar el ángulo con la proporción del cateto opuesto y la hipotenusa (respectivamente, el cateto adyacente y la hipotenusa). • Descubren que esta relación se mantiene para varios triángulos semejantes, y que el ángulo se mantiene. • Explican las razones trigonométricas por medio de dibujos. • Resuelven triángulos en ejercicios rutinarios; es decir, determinan todos sus ángulos y la medida de todos sus lados. • Resuelven problemas de la vida cotidiana, de geometría y de ciencias naturales, aplicando las razones trigonométricas.
OA 9 Aplicar las razones trigonométricas en diversos contextos, en la composición y descomposición de vectores y determinar las proyecciones de vectores.	• Representan vectores, utilizando seno y coseno. • Utilizan las razones trigonométricas para componer (descomponer) vectores. • Determinan las proyecciones perpendiculares de vectores, utilizando las razones trigonométricas. • Resuelven problemas de la vida cotidiana y de otras ciencias, que están relacionados con vectores y con las razones trigonométricas.

SUGERENCIAS DE ACTIVIDADES

Objetivos de Aprendizaje

OA 6

Explicar el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo:

- **Por medio de situaciones de la vida real y de otras asignaturas.**
- **Identificándolo con el interés compuesto.**
- **Representándolo de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo.**
- **Expresándolo en forma recursiva $f(t + 1) - f(t) = a \cdot f(t)$.**
- **Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.**

Observaciones a la o el docente

Se recomienda representar concretamente ambos procesos del crecimiento. No se requieren cálculos difíciles. En el primer modelo se agrega siempre la mitad del anterior, y en el segundo, siempre la misma cantidad de 12. Con las monedas amontonadas (o los palitos armados), se ve la forma del gráfico del crecimiento porcentual constante del primer modelo, y también la forma del gráfico del crecimiento constante.

El o la docente decide qué forma de trabajo desea promover. Se sugiere que las alumnas y los alumnos formulen preguntas o expongan hipótesis propias, sin temor a equivocarse, y que compartan sus puntos de vista en forma abierta y desinteresada para resolver el problema planteado. (OA B)

Actividades

1. Resuelven el siguiente problema: en una región rural, se planifica la urbanización de un sector de sitios eriazos. Al terminar la urbanización, ya existen 16 casas de veraneo. Se proyecta un aumento de casas según dos modelos: primero, por propaganda interna, un aumento anual de 50 % de las casas ya existentes. En otro modelo se cuenta con un aumento anual de 12 casas.

Zona sur

Modelar

Identificar si un cambio es cuadrático o porcentual constante y seleccionar el modelo adecuado. (OA i)

- Representan concretamente, con monedas o palitos de madera, el crecimiento del número de casas de veraneo para los próximos 5 años. Arman en paralelo ambos modelos del crecimiento anual.

Año 0 Año 1 Año 2 Año 3 Año 4 Año 5

- Describen las características de las gráficas de los dos tipos de crecimiento de urbanización.
- Responden a las preguntas:
  - ¿Cuál de los dos modelos de urbanización es más fuerte? Explican y comunican sus respuestas.
  - Acorde al crecimiento, ¿en qué año supera un modelo al otro? Justifican.
  - Elaboran las ecuaciones recursivas para ambos modelos de crecimiento.

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA 20 de 1° medio.**

Observaciones a la o el docente

En este problema se presentan dos modelos de crecimiento: el primero, dado por una propaganda interna con un aumento anual de 50 % de las casas ya existentes; el segundo modelo considera un aumento anual constante de 12 casas.

Para comparar y determinar qué modelo es más fuerte, en el sentido de que crece rápido y seguro en el tiempo, se puede considerar estimaciones intuitivas, elaborar gráficos y argumentar matemáticamente. Para la argumentación matemática y el impacto que puede tener sobre la población, se puede proyectar uno de los modelos a 100 años y observar de manera teórica lo que ocurriría en esta región rural.

Se sugiere utilizar algún *software* educativo para realizar gráficas; por ejemplo, el Winplot, que se puede descargar de manera gratuita de la página

› http://www.softonic.com/s/para-graficar-funciones-matematicas

También se puede trabajar con programas de gráficas en línea, como las siguientes:

› http://fooplot.com/?lang=es#W3sidHlwZSI6MCwiZXEiOiJ4XjIiLCJjb2xvciI6IiMwMDAwMDAifSx7InR5cGUiOjEwMDB9XQ--

› http://www.disfrutalasmatematicas.com/graficos/grafico-funciones.php

› http://wolframalpha0.blogspot.com/2012/09/como-graficar-funciones-online.html

› http://www.onlinefunctiongrapher.com/

Se sugiere motivar a los alumnos y las alumnas para que compartan sus ideas y puntos de vista en forma segura y valiente, aunque puedan ser rechazados por los argumentos de otros y otras. (OA B)

2. Para invertir capital, se ofrecen dos fondos mutuos de intereses compuestos, con las siguientes condiciones: en el primer fondo, se obtiene anualmente un 6 % de intereses, que se agrega al capital invertido; para el segundo fondo, se considera 12 veces un 0,5 %, que se agrega mensualmente al capital invertido.

a. Conjeturan si las condiciones en total son iguales o no.

b. Elaboran las fórmulas recursivas del crecimiento del capital para ambos fondos mutuos.

c. Para comprobar o rechazar la conjetura, calculan lo que ocurre con un capital invertido de $ 50 000 000 y un plan de tres años, en cada modelo. Utilizan la calculadora y redondean en cada paso a pesos enteros.

d. Responden: para financiar un crédito, ¿es más favorable cancelar anualmente intereses de 24 % o mensualmente en 12 cuotas de 2 %? Explican la respuesta sobre la base de los resultados del ejercicio c).

Argumentar y comunicar

Explicar procedimientos de soluciones propias, demostraciones de resultados y conectores. (OA e)

Modelar

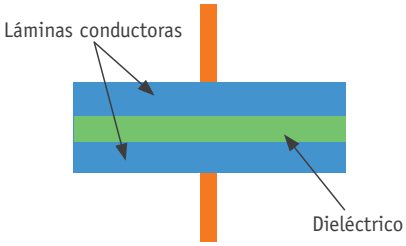
Identificar si un cambio es cuadrático o porcentual constante y seleccionar el modelo adecuado. (OA i)

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA 21 de 1° medio.**

3. Un condensador eléctrico tiene una carga de 500 unidades. Al descargarlo, pierde la octava parte de su carga anterior por segundo.

Argumentar y comunicar

Explicar procedimientos de soluciones propias, demostraciones de resultados y conectores. (OA e)



- Determinan el porcentaje de carga que queda.
- Elaboran la ecuación recursiva del decrecimiento de la carga del condensador.
- Confeccionan una tabla en la cual registran la carga en cada momento del condensador, por los primeros 15 segundos.
- Responden: ¿En qué segundo queda la mitad de la carga original, a partir del inicio de la descarga?
- Confeccionan el gráfico que representa el decrecimiento de la carga del condensador.

® **Ciencias Naturales OA 8 de 8° básico.**

Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)

4. Un curso del 2° medio, de 25 alumnos y alumnas, planifica su viaje de estudios. En el Consejo de Curso deciden ahorrar mensualmente un monto de $ 2 000 por alumno o alumna, durante 18 meses, y depositar ese ahorro en un banco. Este les ofrece un fondo de "Ahorro especial para eventos escolares", que considera un 0,75 % de intereses mensuales.

- Completan la siguiente tabla de ahorro con los ingresos mensuales y los intereses compuestos. Utilizan la calculadora y redondean los montos a pesos enteros:

N° MES	CAPITAL AL INICIO DEL MES	INTERESES PARA EL MES	CAPITAL AL FINAL DEL MES
1	50 000	375	50 375
2	100 375	753	101 128
3			
4			
5			
6			
7			
8			
…			
18			

- Calculan el porcentaje del ahorro total de acuerdo al capital invertido en los 18 meses.

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA 21 de 1° medio.**

Argumentar y comunicar

Explicar procedimientos de soluciones propias, demostraciones de resultados y conectores. (OA e)

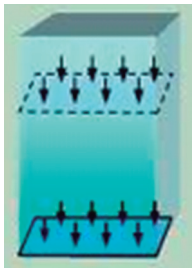
Modelar

Identificar si un cambio es cuadrático o porcentual constante y seleccionar el modelo adecuado. (OA i)

5. La presión del aire en la atmósfera decrece con la altura. A nivel del mar hay una presión de 1 000 hPa (hecto Pascal). El decrecimiento de la presión en el aire es de aproximadamente 12 % por cada 1 000 (mil) metros de aumento de altura.

- Elaboran la ecuación recursiva que representa el decrecimiento de la presión del aire en la atmósfera.
- Determinan sucesivamente las presiones del aire desde el nivel del mar hasta una altura de 11 000 m, en la cual pueden viajar los aviones.

- Responden qué presión hay en la cima del volcán chileno Ojos del Salado, el volcán más alto del país.



® **Ciencias Naturales OA 8 de 7° básico.**

6. La concentración del gas dióxido de carbono en el aire está en el año 2013 a un nivel de 400 ppm (partículas por millón), lo que significa que hay 400 partículas de dióxido de carbono dentro de un millón de partículas de aire. Se estima el aumento anual de la concentración del dióxido de carbono en 0,6 %.
   - Elaboran la ecuación recursiva que representa el crecimiento de la concentración del dióxido de carbono en el aire, a partir del año 2013, si se mantiene el porcentaje del aumento anual.
   - Determinan sucesivamente las concentraciones proyectadas para los próximos años, hasta el año 2020.
   - Si se lograra disminuir el porcentaje del aumento anual a la mitad, a partir del año 2015, ¿cuál sería la concentración del dióxido de carbono en el año 2020?

® **Ciencias Naturales OA 17 de 1° medio.**

Modelar

Identificar si un cambio es cuadrático o porcentual constante y seleccionar el modelo adecuado. (OA i)

Argumentar y comunicar

Explicar procedimientos de soluciones propias, demostraciones de resultados y conectores. (OA e)

Modelar

Identificar si un cambio es cuadrático o porcentual constante y seleccionar el modelo adecuado. (OA i)

Argumentar y comunicar

Explicar procedimientos de soluciones propias, demostraciones de resultados y conectores. (OA e)

7. El café caliente se enfría lentamente en una taza. Se estima que la disminución de la temperatura del café depende de la diferencia entre esa temperatura y la del entorno. La ecuación recursiva es la siguiente: $x(t+1) - x(t) = p \cdot [x(t) - XA]$, en la cual la variable p es el porcentaje de disminución por intervalo de tiempo, y la variable XA representa la temperatura del entorno, que se considera constante.
   - El café tiene una temperatura inicial de 70° C y la temperatura del entorno es de 20° C. Después de 10 minutos, la temperatura del café es de 64° C. Determinan el porcentaje p de la disminución de la temperatura en intervalos de 10 minutos.
   - Calculan sucesivamente, en pasos de 10 minutos, la temperatura para la próxima media hora.
   - ¿En qué intervalo de tiempo pasa la temperatura del café a la mitad de la temperatura inicial?

Observaciones a la o el docente

Las siguientes actividades pueden trabajarse en pares o en grupos. Es posible que los y las estudiantes consideren ejemplos particulares para cada proposición, y que esto genere algún tipo de discusión, la que se debe desarrollar con respeto y considerando las diferencias. Se sugiere que practiquen formas de una buena convivencia. (OA D)

® **Ciencias Naturales OA 11 de 8° básico.**

Representar

Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos. (OA m)

Modelar

Identificar si un cambio es cuadrático o porcentual constante y seleccionar el modelo adecuado. (OA i)

Argumentar y comunicar

Explicar procedimientos de soluciones propias, demostraciones de resultados y conectores. (OA e)

8. Resolver los siguientes problemas:
   - Un bosque de árboles nativos tiene una masa de madera aproximada en 90 000 m^3 en el año 2013. Se estima un crecimiento anual de la masa de madera en 3 %.

   - Elaboran la ecuación recursiva que representa el crecimiento de la masa de madera.
   - Calculan sucesivamente, a base de la estimación, la masa de madera para los próximos cinco años.
   - ¿En qué año llegará el bosque a una masa de madera de 115 000 m^3?
   - En años anteriores al 2013 se registró un crecimiento de 4 % ¿Qué masa de madera tenía el bosque en el año 2010? Calculan sucesivamente la masa.

- Se desmonta un área de arbustos. Al inicio de las observaciones, el área desmontada tenía un tamaño de 8 000 m^2. Debido a las condiciones nuevas en el lugar, se registró una propagación de flores silvestres que ya tenían un área de 800 m^2. Los trabajos del desmontaje avanzan con un aumento semanal constante de 5 500 m^2 y terminan en la cuarta semana, mientras el área de flores se duplica cada semana.

  - Elaboran la ecuación regresiva del crecimiento constante del avance de las obras, y la ecuación regresiva del crecimiento de la propagación de las flores silvestres.
  - Confeccionan las tablas de valores de ambas funciones de crecimiento.
  - Grafican ambas funciones en el mismo sistema cartesiano de coordenadas.
  - ¿En qué semana el área de las flores silvestres cubre totalmente el área desmontada?

® **Ciencias Naturales OA 8 de 1° medio.**

9. En la tabla se muestra el desarrollo del PIB per cápita (Producto Interno Bruto) que equivale al valor de la producción del país, por cada habitante, en el año presente.

AÑO	2009	2010	2011	2012	2013
PIB en USD	10 107	12 617	14 501	15 356	16 300

- Elaboran un gráfico de línea que muestra el crecimiento del PIB desde el año 2009 hasta el año 2013.

Representar

Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos. (OA m)

Modelar

Identificar si un cambio es cuadrático o porcentual constante y seleccionar el modelo adecuado. (OA i)

Argumentar y comunicar

Explicar procedimientos de soluciones propias, demostraciones de resultados y conectores. (OA e)

- Conjeturan acerca un posible cambio porcentual constante.
- Calculan el porcentaje del aumento del PIB año por año y verifican o rechazan la conjetura.
- ¿Se puede aproximar el cambio del PIB por el porcentaje constante de 10 % y el valor inicial del año 2010? Explican y comunican la respuesta.

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA 20 de 1° medio.**

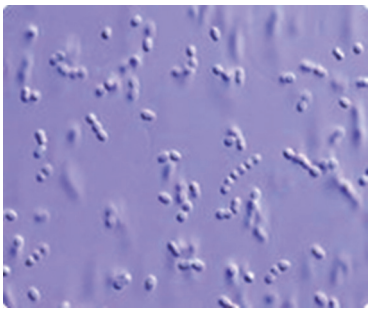
Representar

Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos. (OA m)

Modelar

Identificar si un cambio es cuadrático o porcentual constante y seleccionar el modelo adecuado. (OA i)

10. En la producción de yogur o de queso, se necesitan bacterias lácteas. Las poblaciones de las bacterias lácticas aumentan según un crecimiento porcentual constante. Al inicio de las observaciones, hay 20 000 bacterias lácticas en un mililitro de leche. Una hora más tarde, el número de las bacterias ascendió a 25 000 individuos.



- Determinan el porcentaje del crecimiento por hora.
- Elaboran la ecuación recursiva que describe el crecimiento.
- Determinan el número de individuos hora por hora, y para las próximas 12 horas.
- Elaboran el gráfico que representa el crecimiento de la población de bacterias lácteas.
- Determinan el tiempo en el cual la población de bacterias lácteas se duplica, mediante el gráfico.

® **Ciencias Naturales OA 5 de 7° básico.**

Objetivos de Aprendizaje

OA 8

Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos:

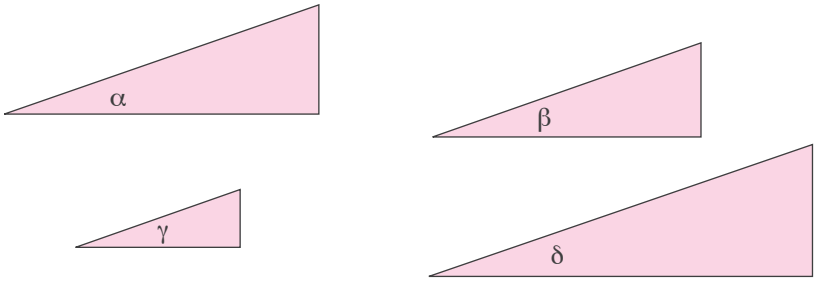
- **Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos.**
- **Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo.**
- **Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados.**
- **Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.**

Observaciones a la o el docente

Se sugiere utilizar también algún *software* educativo para graficar funciones trigonométricas, que se puede descargar de http://www.softonic.com/s/graficas-funciones-trigonometricas-seno-coseno-y-tangente/gratis-windows-xp

Actividades

1. La pendiente de una calle se expresa en porcentaje (por cientos), que se refiere a la *razón entre* la altura (vertical) a la cual sube la calle, y la distancia por la que avanza en dirección horizontal. El dibujo muestra el perfil de cuatro calles:



   a. Determinan la pendiente del perfil de cada calle.

   b. Responden: ¿Qué relación existe entre los tres triángulos? Explican la respuesta con el resultado de la actividad anterior.

   c. Determinan, aproximadamente y mediante un modelo gráfico, las pendientes en % de las calles que suben por los siguientes ángulos:

   - 10°
   - 20°
   - 30°
   - 40°

Argumentar y comunicar

Explicar procedimientos de soluciones propias, demostraciones de resultados y generalizaciones. (OA e)

d. Determinan, aproximadamente, mediante representación gráfica, los ángulos por los cuales suben las calles si las pendientes son las siguientes:
   - 25 %
   - 40 %
   - 50 %
   - 100 %

e. Una calle tiene una pendiente de 20 % y sube a una altura de 40 m sobre el nivel anterior. Construyen el perfil de la calle a escala 1: 1000.

f. En un triángulo rectángulo, la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente al ángulo se denomina "tangente". Los alumnos y las alumnas:
   - Comprueban las pendientes aproximadas del ejercicio c) con la tecla **[tan]** de la calculadora.
   - Comprueban los ángulos aproximados del ejercicio d) con la tecla **[$\tan^{-1}$]** de la calculadora.

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)

2. Completan la siguiente tabla con las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente, los ángulos y las expresiones algebraicas. Redondean los ángulos a grados enteros y las longitudes en cm al primer decimal:

ÁNGULO/ LADO DADO	LADO DADO	LADO/ ÁNGULO POR DETERMINAR	RAZÓN TRIGONOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA	RESULTADO
$\alpha = 20°$	$c = 5$ cm	cateto opuesto a	sen $\alpha = \frac{a}{c}$	$a = c \cdot$ sen α	$a = 1{,}7$cm
$\beta = 75°$	$b = 3{,}5$ cm	hipotenusa c			
$a = 4$ cm	$b = 5$ cm	ángulo α			
$a = 4$ cm	$c = 8$ cm	ángulo β			
b = 6 cm	$c = 9$ cm	ángulo α			
$c = 10$ cm	$a = 4$ cm	ángulo α			
$\alpha = 70°$	$b = 6$ cm	hipotenusa c			
$\beta = 30°$	$c = 6{,}5$ cm	cateto adyacente			
$\beta = 55°$	$c = 7{,}5$ cm	cateto opuesto			

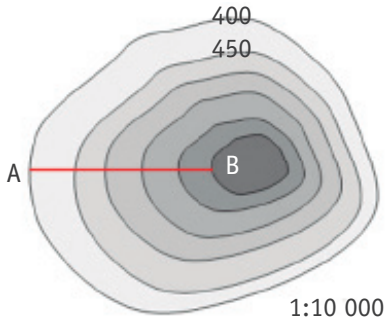
Observaciones a la o el docente

Las siguientes actividades se pueden trabajar en pares o en grupos. Se sugiere que los alumnos y las alumnas practiquen el trabajo en grupos a menudo, porque esto enriquece la discusión matemática. Además, promueve actitudes como la responsabilidad, la proactividad y la ayuda a las alumnas y los alumnos menos aventajados. Se sugiere que practiquen formas de buena convivencia en este contexto. (OA D)

3. El dibujo muestra el mapa topográfico de un cerro. Una línea de nivel representa la misma altura sobre la superficie del mar. Se proyecta construir un teleférico que lleva del punto A de la base hasta el punto B en el nivel más alto:

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)



- Determinan la pendiente por medio de la traza del teleférico, con una regla y los datos del mapa topográfico.
- Calculan el ángulo de elevación de la traza del teleférico con la calculadora.
- Determinan la pendiente más inclinada del cerro y calculan el ángulo de elevación respectivo.
- Dibujan un perfil de la traza del teleférico en una escala adecuada.

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA d de 2° medio.**

4. El Seno Agostini, en la Región de Magallanes, tiene un ancho aproximado de 5 000 m. Una embarcación parte de Punta Estela en la dirección de la flecha verde, que forma un ángulo de 65° con la línea punteada en rojo. Manteniendo la dirección, la embarcación llegará a un punto B en la orilla opuesta.

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)

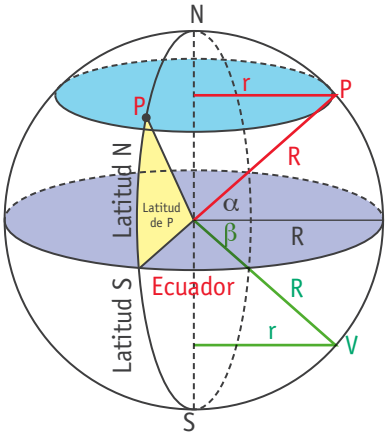
Calculan la distancia entre los puntos A (la partida) y B, mediante una razón trigonométrica. Redondean el resultado a metros enteros.

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA d de 2° medio.**

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)

5. La imagen muestra un dibujo esquemático de la Tierra. Aparecen el radio de la Tierra **R** y el radio **r** del paralelo de un punto P, de la latitud $\alpha = 38°$, en el hemisferio norte, que corresponde a la ciudad de Palermo, en Italia.



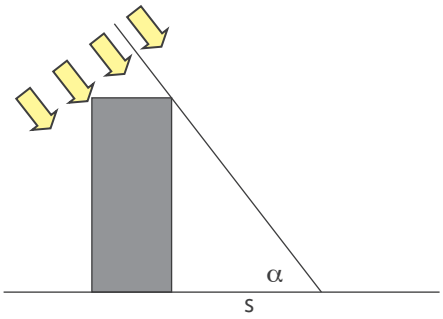
- El ángulo α representa el ángulo de elevación sobre el plano del Ecuador, que lleva al punto P en la superficie de la Tierra. ¿En qué parte del dibujo hay otra vez un ángulo que iguala al ángulo α? Explican la respuesta.
- El radio R de la Tierra es de 6 371 km. Calculan el radio del paralelo en la Tierra, en el cual se ubica la ciudad de Palermo.
- Valparaíso tiene una latitud sur de $\beta = 33°$. Calculan el radio *r* del paralelo en el cual se ubica esa ciudad.
- Calculan la velocidad con la cual Valparaíso gira alrededor del eje terrestre. Expresan la velocidad en $\frac{km}{h}$.
- Responden: ¿En qué partes de la Tierra la velocidad de la rotación es 0? Explican la respuesta mediante una razón trigonométrica.

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA d de 2° medio.**

6. La luz del Sol cae sobre la Tierra en un ángulo $\alpha = 53°$. De un edificio se proyecta una sombra que tiene un largo de $s = 12$ m en terreno horizontal.

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)



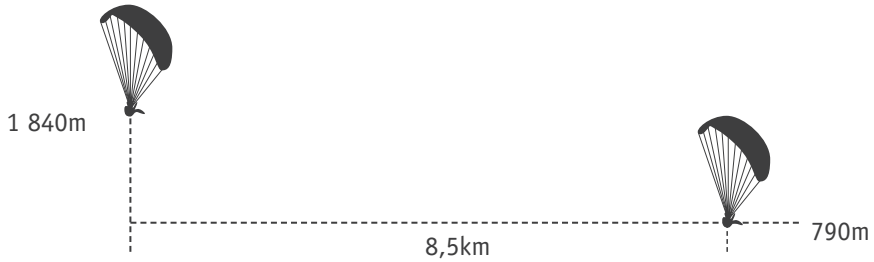
- Calculan la altura del edificio y la expresan en metros redondeados a la primera décima.
- Responden: ¿La sombra se reduce o se agranda si se anota en la mañana? Explican la respuesta.
- Conjeturan, sin realizar cálculos, acerca del efecto en la sombra que tienen los siguientes cambios; explican y comunican la respuesta:
  - Se proyecta la sombra de un edificio que tiene la mitad de la altura.
  - El ángulo α se disminuye.

® **Ciencias Naturales OA 11 de 1° medio.**

7. Un parapente parte en la cima de un cerro de una altura de 1 840 m. El destino en la altura de 790 m está a una distancia horizontal de 8,5 km.

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)



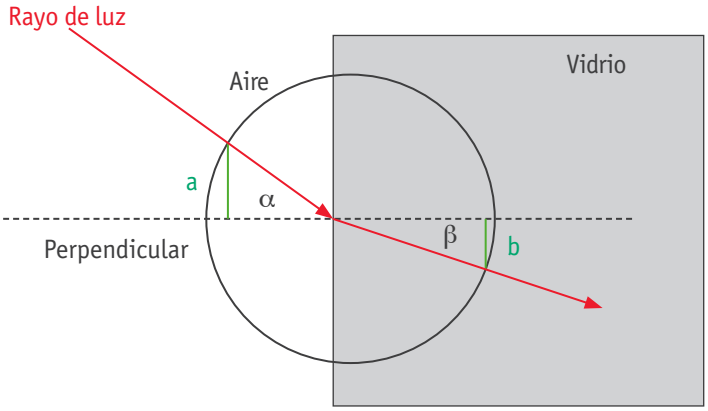
- Se estima que el vuelo hacia abajo es aproximadamente en línea directa. Determinan el ángulo entre el trazado del vuelo y la horizontal. Redondean el ángulo a la primera decimal.
- ¿Cuál sería el ángulo si el parapente hubiera bajado hasta la altura de 790 m en la mitad de la distancia horizontal?

® **Ciencias Naturales OA 9 de 2° medio.**

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

8. Si un rayo de luz pasa del aire a un material transparente, como vidrio, cambia su dirección hacia la línea perpendicular. El ángulo entre el rayo y la perpendicular antes del vidrio se denomina α, y entre el vidrio y la perpendicular se denomina β. La razón $a : b$ entre el segmento a y el segmento b se llama "índice de refracción".



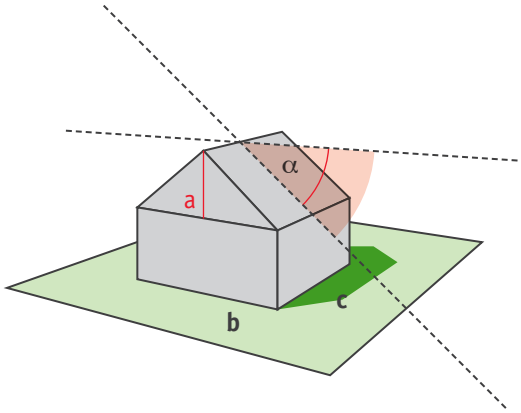
- Verifican que el "índice de refracción" se puede expresar con la razón $\frac{sen\ \alpha}{sen\ \beta}$, en la cual el ángulo α es el ángulo entre el rayo y la perpendicular fuera del vidrio, y el ángulo β es el ángulo entre el rayo y la perpendicular dentro del vidrio.
- Calculan el ángulo β si el ángulo α es de 30°. Redondean a la primera decimal.
- Calculan si el ángulo α es de 60°. Redondean a la primera decimal.

® **Ciencias Naturales OA 11 de 1° medio.**

9. La imagen muestra el modelo de una casa. El ángulo α de la pendiente del techo se mide en relación con la horizontal. La casa tiene un ancho total $b = 12$ m, un largo $c = 10$ m, y el ángulo de la pendiente del techo es $\alpha = 20°$.

Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)

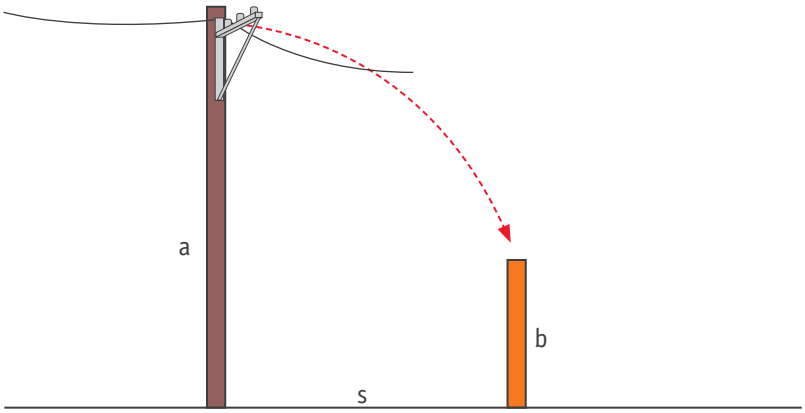


- Determinan la altura a que tiene la punta del techo sobre el segundo piso.
- Calculan el área total del techo.

10. Un poste de madera de alumbrado público tiene una altura $a = 5{,}5$ m. El poste está frente a un muro, a una distancia de $s = 4$ m; el muro tiene una altura $b = 2$ m. Debido a un temporal, el poste cae hacia el muro y se quiebra al chocar contra este.

Resolver problemas

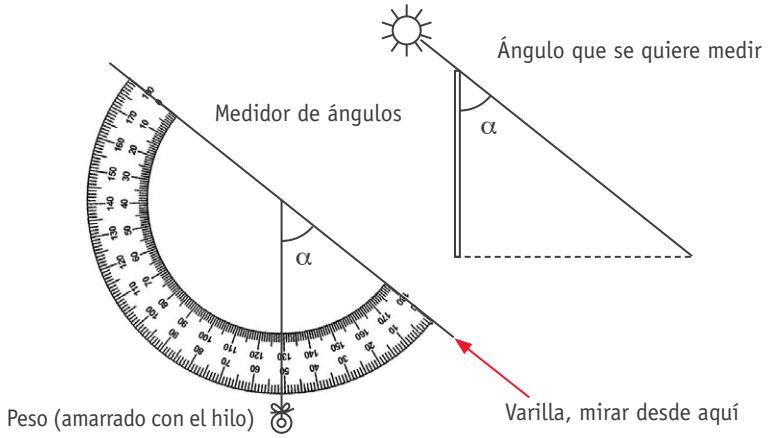
Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)



- Resuelven con una razón trigonométrica: ¿Qué largo tiene la parte del poste que cae al otro lado del muro?
- Resuelven el problema con el teorema de Pitágoras y comparan los resultados.

Observaciones a la o el docente

Esta actividad se puede realizar en terreno, cerca del colegio, y con un instrumento llamado "medidor de ángulos". Es una herramienta de medición fácil de construir. Se necesita un transportador, hilo, un peso, una regla y cinta adhesiva. Se amarra la regla con el transportador por su parte recta, con la cinta adhesiva; si no tienen regla, pueden usar cualquier varilla. En la parte central, donde se ubica el cero en el transportador, se debe poner el hilo con el peso. En algunos casos se puede poner un cáncamo, que actúa de mirilla, para precisar las mediciones.



La punta de la varilla se dirige hacia el final del edificio o poste que se quiere medir; el peso marca el ángulo y con los pasos se puede medir la distancia. Con esta información y los conocimientos de trigonometría se pueden resolver varios problemas concretos sobre la altura de edificios y postes.

Se sugiere realizar este trabajo en equipo, respetando las reglas; cuando se trabaja en terreno, los y las estudiantes deben aceptar plazos y trabajar sin una supervisión directa del profesor o la profesora. (OA D)

® **Ciencias Naturales OA 11 de 2° medio.**

Objetivos de Aprendizaje

OA 9

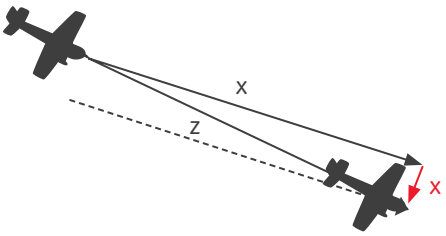
Aplicar las razones trigonométricas en diversos contextos en la composición y descomposición de vectores y determinar las proyecciones de vectores.

Actividades

Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)

1. Un avión vuela a la rapidez constante $x = 150\,\frac{km}{h}$. Debido a un viento cruzado que sopla ortogonalmente a una rapidez y, el avión se desvía en un ángulo de 6°.



- Determinan la rapidez y del viento cruzado y la redondean a la primera decimal.
- Determinan la rapidez total z mediante una razón trigonométrica.
- Verifican la rapidez z aplicando el teorema de Pitágoras.

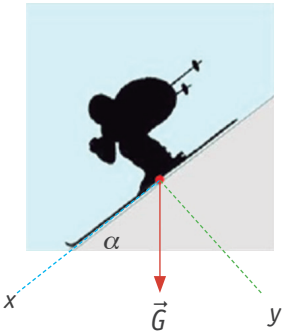
® **Ciencias Naturales OA 10 de 2° medio.**

Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)

2. En el dibujo se observa un esquiador que corre en una pendiente cuyo ángulo de elevación es α = 38°. El esquiador pesa 75 kg, lo que equivale aproximadamente a la fuerza de G =750 N. El vector de la fuerza del peso se muestra verticalmente hacia abajo.

   Dibujan los componentes del vector $\vec{G}$ que están en la dirección de la pendiente (x) y en la dirección ortogonal a la pendiente (y), mediante una descomposición.



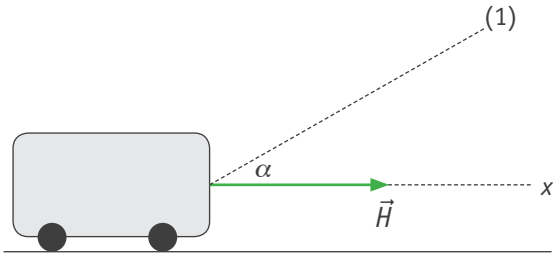
- Expresan los componentes del vector en dirección (x) y en dirección (y), mediante razones trigonométricas.
- Calculan el valor de ambos componentes y lo redondean a la primera decimal.
- ¿Qué pasa con los componentes si el ángulo de elevación se acerca a 0°?, ¿y si se acerca a 90°?

® **Ciencias Naturales OA 10 de 2° medio.**

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

3. Con un cordel como el que se muestra en la dirección (1), se mueve horizontalmente una maleta. La fuerza $\vec{F}$ que actúa en dirección (1) genera un componente horizontal $\vec{H}$, cuyo valor es de 20N.



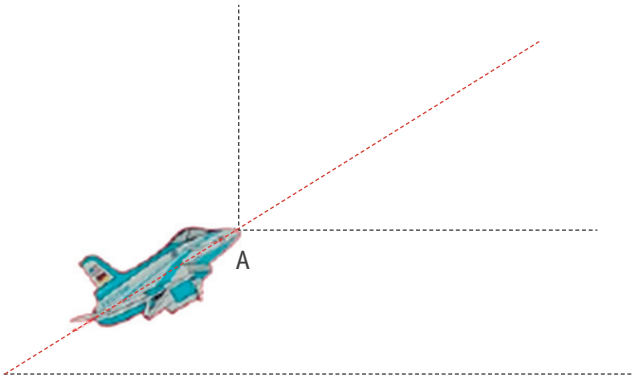
- Dibujan el vector de la fuerza $\vec{F}$ que actúa en dirección (1).
- Determinan el valor de la fuerza F mediante una razón trigonométrica.
- Se varía el ángulo α. ¿Con qué valor del ángulo α son idénticos los vectores $\vec{F}$ y $\vec{H}$?

® **Ciencias Naturales OA 10 de 2° medio.**

4. Un avión "cazador" está en la fase del despegue y vuela a una velocidad $v = 90\ \frac{m}{s}$. El ángulo de elevación es de $\alpha = 30°$.

Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)



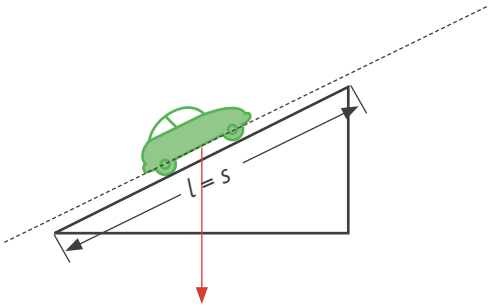
- Dibujan el vector de la rapidez en el punto A, con una escala en la que $10\ \frac{m}{s}$ equivalen a 1 cm.
- Dibujan los componentes horizontales y verticales de la velocidad *v*, por descomposición ortogonal.
- Determinan ambos componentes mediante razones trigonométricas.
- Comparan el resultado del cálculo de los componentes con el dibujo de los vectores a escala.

® **Ciencias Naturales OA 10 de 2° medio.**

5. Un auto de masa 1 000 kg sube una pendiente con un ángulo de elevación de $\alpha = 30°$. Un kilogramo de peso genera aproximadamente una fuerza de 10 N.

Argumentar y comunicar

Usar lenguaje algebraico para comprobar o descartar la validez de conjeturas. (OA f)



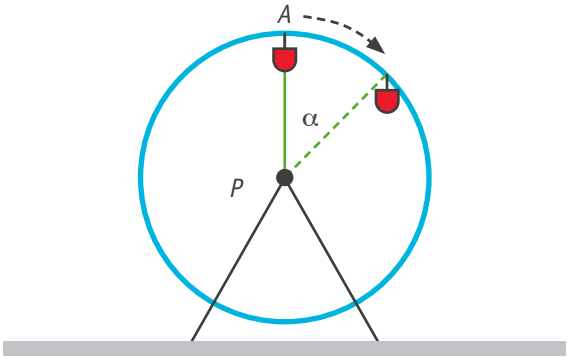
- Conjeturan acerca de la fuerza mínima que debe generar el motor del auto para compensar la fuerza que tira el auto hacia abajo, en dirección de la pendiente.
- Aplican una razón trigonométrica para determinar la fuerza mínima que debe generar el motor y redondean el resultado a la primera decimal.

® **Ciencias Naturales OA 10 de 2° medio.**

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)

6. En un parque de entretención hay una rueda gigantesca que gira en el sentido de las manillas del reloj. Una góndola con 6 personas pesa 625 kg, incluida la palanca. La fuerza del peso de aproximadamente 6250 N actúa perpendicularmente hacia abajo. En la posición *A*, toda la fuerza de la góndola actúa sobre el punto *P* del eje de rotación, ejerciendo presión.



- La góndola gira en un ángulo de $\alpha = 30°$. Determinan gráficamente el vector de la fuerza que actúa sobre el punto *P,* mediante la descomposición de vectores.
- Calculan el valor de la fuerza que actúa sobre el punto *P,* mediante una razón trigonométrica.
- ¿En qué posición la góndola actúa sin fuerza alguna sobre el punto *P*? Explican la respuesta con una razón trigonométrica.
- ¿En qué posiciones la góndola actúa ejerciendo presión sobre el punto *P*? Explican la respuesta con una razón trigonométrica.

® **Ciencias Naturales OA 10 de 2° medio.**

Argumentar y comunicar

Describir relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos. (OA d)

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

7. En el dibujo, Francisco tira la espaldera con una fuerza $\vec{F}$, representada por el vector dibujado en color rojo. La fuerza $\vec{F}$ origina una componente horizontal $\vec{H}$ y una componente vertical $\vec{V}$.

- Determinan gráficamente los componentes $\vec{H}$ y $\vec{V}$.
- Miden el vector $\vec{F}$ y los componentes $\vec{H}$ y $\vec{V}$.
- Determinan las magnitudes de las fuerzas, si un centímetro (1 cm) en el dibujo corresponde a una fuerza de 20 N.

- Miden el ángulo entre la dirección de la fuerza $\vec{F}$ y la espaldera.
- Calculan los componentes $\vec{H}$ y $\vec{V}$ mediante una razón trigonométrica.
- Comparan el resultado del cálculo con el resultado gráfico.

® **Ciencias Naturales OA 10 de 2° medio.**

® **Educación Física y Salud OA 4 de 2° medio.**

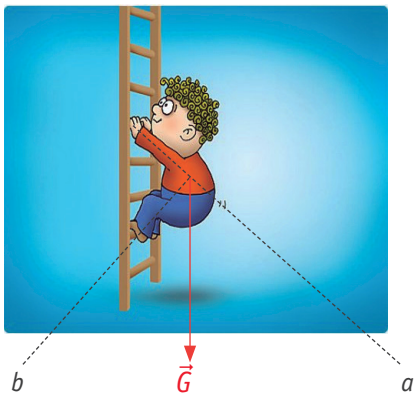
Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

Argumentar y comunicar

Describir relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos. (OA d)

8. Carlos se sujeta con sus manos y sus pies en la espaldera. Sus brazos y sus piernas forman un ángulo recto. Carlos tiene un peso de 60 kg, que ejerce una fuerza directamente hacia abajo de G = 600 N. El ángulo entre el vector $\vec{G}$ y la línea a mide 50°.



- Determinan gráficamente la fuerza con la cual Carlos tira la espaldera con sus manos (1 cm corresponde a 200 N).
- Determinan gráficamente la fuerza con la cual Carlos presiona la espaldera con sus pies (1 cm corresponde a 200 N).
- Calculan ambas fuerzas mediante razones trigonométricas.
- Comparan el resultado del cálculo con el resultado gráfico.

Observaciones a la o el docente

Se sugiere que las alumnas y los alumnos formulen preguntas adicionales en todas las actividades anteriores, eligiendo situaciones que les interesen de los diversos contextos presentados, para promover el pensamiento matemático. (OA B)

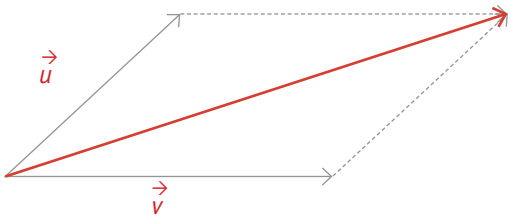
® **Ciencias Naturales OA 10 de 2° medio.**

® **Educación Física y Salud OA 4 de 2° medio.**

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

9. Demuestran lo siguiente: si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores que no tienen la misma dirección (no son colineales), entonces la adición de estos corresponde a la diagonal del paralelogramo formado por ambos.



Observaciones a la o el docente

Se sugiere que las alumnas y los alumnos formulen preguntas adicionales en todas las actividades anteriores, eligiendo situaciones que les interesen de los diversos contextos presentados, para promover el pensamiento matemático. (OA B)

SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN

EVALUACIÓN 1

Objetivos de Aprendizaje

OA 6

Explicar el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo:

- **Por medio de situaciones de la vida real y de otras asignaturas.**
- **Identificándolo con el interés compuesto.**
- **Representándolo de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo.**
- **Expresándolo en forma recursiva $f(t + 1) - f(t) = a \cdot f(t)$.**
- **Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.**

Indicadores de Evaluación

- Reconocen el modelo lineal y porcentual constante.
- Reconocen que en la variante A hay un "crecimiento cero".
- Desarrollan las ecuaciones recursivas.
- Representan gráficamente los crecimientos.
- Reconocen que las ganancias en el modelo C aumentan fuertemente.

EVALUACIÓN 1

ACTIVIDAD	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
Trabajo en pares o grupal Tres personas (A, B y C) disponen de un capital de $1 000 000. Ellas deciden guardar su dinero de diferentes formas: • A lo guarda en la caja fuerte de su casa. • B lo deposita en un banco con intereses anuales simples de 6 %. La base de los intereses anuales siempre es el capital inicial. • C lo deposita en un banco con intereses anuales compuestos de 5 %. Después de 5 años, se hace el balance de las ganancias del capital invertido. • Elaboran las tres ecuaciones de cambio de la forma recursiva $f(t + 1) - f(t)$, en la cual la variable t representa el número de años a partir del momento en que realizan el depósito. • Determinan las ganancias de cada depósito después de un año. • Responden en qué año las ganancias del depósito C superan las ganancias del depósito B. • ¿Qué desarrollo tienen las ganancias anuales en la variante C? • Elaboran, en el mismo sistema de coordenadas, los gráficos que representan el "crecimiento" de cada capital. • Si un capital se invierte con intereses compuestos anuales de 10 %, ¿cuántos años deberán transcurrir, aproximadamente, hasta que dicho capital se duplique?	• Identifican los tres tipos de crecimiento. • Desarrollan correctamente las ecuaciones recursivas. • Determinan las ganancias y el capital total en el tiempo requerido. • Grafican correctamente el crecimiento de los tres capitales e identifican el "crecimiento cero" en una recta horizontal. • Conjeturan que el capital invertido con intereses compuestos anuales de 10 % se duplica antes de 10 años.

EVALUACIÓN 2

Objetivos de Aprendizaje

OA 8

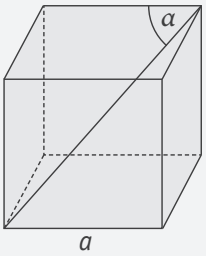
Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos:

- **Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos.**
- **Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo.**
- **Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados.**
- **Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.**

Indicadores de Evaluación

- Resuelven triángulos en ejercicios rutinarios; es decir, determinan todos sus ángulos y la medida de todos sus lados.
- Resuelven problemas contextualizados aplicando las razones trigonométricas.

EVALUACIÓN 2

ACTIVIDAD	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
Esta evaluación incluye una presentación, individual o en pares, de la resolución de uno de los problemas planteados. También se podría agregar la resolución de uno de los problemas al Portafolio. Los alumnos y las alumnas resuelven los siguiente problemas: **1.** En la señal de tránsito de la imagen, se muestra una pendiente de 6 % de elevación. Determinan el ángulo de elevación de la calle. **2.** En el patio del colegio, los y las estudiantes del 2° medio construyeron un resbalín para los alumnos y las alumnas de los primeros cursos. Las medidas de las tablas son: 2,7 m la más larga, y 1,8 m la tabla de la altura. • Determinan el ángulo en que se debe cortar la madera más larga para que pueda topar el piso. • Determinan las medidas ideales para hacer un resbalín por el cual el deslizamiento sea más rápido o más lento. **3.** El siguiente cubo tiene lado a. Calculan el valor del ángulo.  	• Identifican las medidas dadas, con lados de los triángulos rectángulos que representan la situación de manera pictórica. • Calculan lados y ángulos para resolver los problemas. • Utilizan las razones trigonométricas para resolver los problemas. • Calculan lados utilizando expresiones algebraicas; para ello, aplican conocimientos anteriores.

EVALUACIÓN 3

Objetivos de Aprendizaje

OA 9

Aplicar las razones trigonométricas en diversos contextos en la composición y descomposición de vectores y determinar las proyecciones de vectores.

Indicadores de Evaluación

- Representan vectores utilizando seno y coseno.
- Utilizan las razones trigonométricas para componer vectores y descomponerlos.

ACTIVIDAD	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
Esta actividad se presta para que las alumnas y los alumnos se autoevalúen, y para que el o la docente asesore a un alumno, una alumna, o más, por medio de una entrevista individual. Los alumnos y las alumnas determinan: **1.** Las coordenadas de los siguientes vectores: • $P(cos(45°), sen(45°))$; $Q(3 \cdot cos(45°), sen(45°))$; $R(cos(45°), 3 \cdot sen(45°))$; $S(3 \cdot sen(45°), 3 \cdot cos(45°))$ • Si se unen estos puntos, ¿se obtiene alguna figura conocida? **2.** Las coordenadas vectoriales con razones trigonométricas de los vectores: • $P(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$; $Q(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$; $R(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ • Si se unen estos puntos, ¿se obtiene alguna figura conocida?	• Traspasan desde la representación de vectores hasta la representación numérica tradicional y viceversa, utilizando las razones trigonométricas. • Utilizan ángulos conocidos para pasar de un tipo de representación a otra. • Utilizan la calculadora en caso necesario. • Reconocen figuras conocidas uniendo puntos en el plano cartesiano.

UNIDAD 4

PROPÓSITO

Sobre la base de los conocimientos adquiridos en años anteriores, en esta unidad se pretende que los y las estudiantes asocien el concepto de probabilidad experimental para comprender el concepto de variable aleatoria finita, definiéndola en diferentes experimentos o problemas, determinando sus posibles valores y graficando su distribución para entender y calcular su probabilidad.

Asimismo, se abordan diferentes situaciones que involucran permutaciones y combinatorias, y se espera que los alumnos y las alumnas sean capaces de determinar el número de combinaciones totales para calcular la probabilidad de un evento al resolver problemas. Además, se profundiza en la aplicación del principio multiplicativo y la regla aditiva en situaciones que requieran del cálculo de probabilidad con permutación o combinatoria.

Después de haber comprendido el concepto de variable aleatoria, y estudiado la probabilidad en diferentes contextos, ya sea en este curso o en cursos anteriores, se espera que refuercen su entendimiento explicando el rol de la probabilidad en la sociedad, describiendo su aplicación en diversos contextos, identificando situaciones basadas o no en probabilidades, mostrando información de los medios de comunicación y detallando el sentido de la probabilidad en dicho contexto.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Función.
- Experimento.
- Variable.
- Probabilidad (regla de Laplace).
- Principio multiplicativo.
- Regla aditiva.

PALABRAS CLAVE

Probabilidad, distribución, variable aleatoria, combinatoria, permutación, rol de la probabilidad.

CONOCIMIENTOS

- Variable aleatoria.
- Función distribución.
- Combinatoria.
- Permutación.
- Probabilidad.

HABILIDADES

- Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, y determinando sus limitaciones. **(OA k)**
- Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de estas. **(OA l)**
- Transitar entre los distintos niveles de representación de funciones. **(OA m)**
- Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos. **(OA n)**

ACTITUDES

- Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social. **(OA E)**
- Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas. **(OA F)**

UNIDAD 4	
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	INDICADORES DE EVALUACIÓN
Se espera que los y las estudiantes sean capaces de:	Las y los estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA 10 Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas: • Definiendo la variable. • Determinando los posibles valores de la incógnita. • Calculando su probabilidad. • Graficando sus distribuciones.	• Reconocen la diferencia entre las variables utilizadas en álgebra y las variables aleatorias. • Definen variables aleatorias finitas en experimentos aleatorios. • Determinan los valores que puede tomar la variable aleatoria finita. • Aplican correctamente la terminología $X = x_i$, en la cual los x_i representan los valores que puede tomar la variable aleatoria. • Determinan las probabilidades de una variable aleatoria aplicando la terminología $P(X = x_i)$. • Elaboran tablas y gráficos para representar la distribución de una variable aleatoria finita.
OA 11 Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.	• Realizan permutaciones de hasta cinco elementos, con material concreto o pictóricamente. • Reconocen el patrón con el cual se aumenta el total de posibilidades si se agrega un elemento. • Aplican el término "$n!$" en la resolución de problemas azarosos. • Combinan las permutaciones con el sorteo al azar, con o sin reposición. • Resuelven problemas de juegos de azar y de la vida cotidiana, aplicando combinatoria y permutaciones.
OA 12 Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad: • Revisando informaciones de los medios de comunicación. • Identificando suposiciones basadas en probabilidades. • Explicando cómo una probabilidad puede sustentar suposiciones opuestas. • Explicando decisiones basadas en situaciones subjetivas o en probabilidades.	• Identifican artículos de diarios o revistas, cuyo contenido se relaciona con probabilidades. • Reconocen situaciones en las cuales se utilizan datos azarosos para planificar proyectos. • Transfieren resultados de experimentos azarosos a situaciones de la vida real. • Reducen un problema de la vida diaria para simularlo en un experimento al azar. • Aplican las reglas multiplicativa, aditiva y de la combinatoria de probabilidades, para tomar decisiones que involucran frecuencias relativas de procesos de producción, de seguridad, etc. • Comparan resultados obtenidos de manera probabilística teórica, resultados basados en creencias y resultados estimativos.

SUGERENCIAS DE ACTIVIDADES

Objetivos de Aprendizaje

OA 10

Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas:

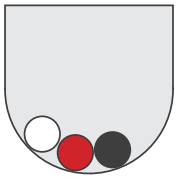
- **Definiendo la variable.**
- **Determinando los posibles valores de la incógnita.**
- **Calculando su probabilidad.**
- **Graficando sus distribuciones.**

Actividades

1. En un recipiente hay tres bolitas: una blanca, una roja y una negra. Se saca al azar una bolita sin reponerla, y se sigue sacando más bolitas hasta que aparezca la bolita roja. Se denomina con X la variable aleatoria que representa elnúmero de extracciones necesarias.

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)



- Completan la tabla siguiente con los eventos y los valores respectivos que toma la variable aleatoria X:

Eventos posibles	r	b, r			
Variable aleatoria X	1				

- Determinan los eventos de los siguientes valores que toma la variable aleatoria X:
  - $X = 2$
  - $X \leq 2$
  - $X > 1$
- Responden: ¿Qué eventos describe la variable aleatoria del valor $X = 3$?

Observaciones a la o el docente

Las siguientes actividades pueden trabajarse con hojas de cálculo del programa Excel o con juegos de azar en línea.

Para la primera alternativa, se puede consultar la página web http://www.eyeintheskygroup.com/Azar-Ciencia/Probabilidad-Estadistica-Juegos-de-Azar/Analisis-Combinatorio-Hoja-de-Calculo.htm

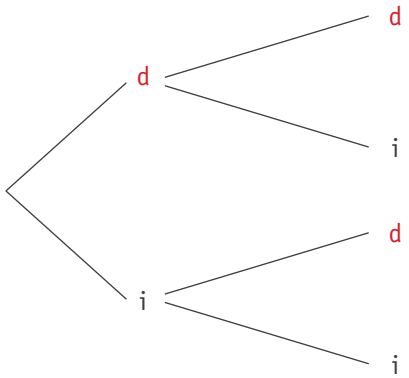
Para sugerir páginas en línea a las y los estudiantes, la profesora o el profesor debe mirar previamente la página que desee recomendar en clases, ya que hay muchos juegos de azar en línea que son pagados y que pueden desarrollar dependencia. Se recomienda fomentar el uso responsable de la tecnología y procesar la información a fin de generar conocimientos. (OA F)

Representar

Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos. (OA m)

2. De una encomienda de vasos se sacan, de a uno, tres vasos para registrar si están intactos o tienen algún daño. No importa en qué orden aparecen los vasos intactos o dañados, solo interesa el número de vasos dañados. Se anota con una "i" si un vaso está intacto, y con una "d", si está dañado.

- Completan el árbol de posibilidades para sacar al azar tres vasos.



- Se denomina con X la variable aleatoria que representa el número de vasos dañados. Mencionan todos los valores que puede tomar la variable X.
- Determinan los eventos si la variable aleatoria X toma los siguientes valores:
  - $X = 0$
  - $X \leq 1$
  - $1 \leq X \leq 3$
  - $X = 2$
  - $X = 3$
- Responden: ¿Qué valor toma la variable X para los eventos "did" y "iid"?

3. Alumnos de la selección de fútbol de un colegio realizan un "juego de penales" con las siguientes reglas: cada uno tiene un máximo de 4 tiros; si un jugador convierte un gol en el primer intento, termina y obtiene 3 puntos; si convierte en el segundo intento, termina y obtiene 2 puntos; si convierte en el tercer intento, termina y obtiene 1 punto; si convierte un gol en el cuarto intento, obtiene 0 puntos. Y si no convierte, obtiene una multa de (-1) punto.

Representar

Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos. (OA m)

- Elaboran un árbol o una tabla de posibilidades.
- Determinan todos los eventos posibles de este "juego de penales".
- Introducen adecuadamente una variable aleatoria X que representa este "juego de penales".
- Determinan todos los valores x_i posibles que puede tomar la variable aleatoria X.
- Calculan las probabilidades $P(X = x_i)$ de los valores x_i que puede tomar la variable aleatoria X. Se estima la probabilidad de convertir un gol, en 80 %.

® **Educación Física y Salud OA 1 de 2° medio.**

4. Pamela y Martin quieren jugar a lanzar monedas con las siguientes condiciones: se lanza la misma moneda cinco veces, y después de cada lanzamiento, se anota el evento "cara" o "sello". Los jugadores se turnan después de cada lanzamiento. Gana quien obtiene por primera vez una racha de dos veces cara.

Representar

Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos. (OA m)

- Elaboran un árbol o una tabla de posibilidades para cinco lanzamientos.
- Marcan los posibles caminos ganadores y anotan los eventos respectivos.
- Una variable aleatoria X representa el número de lanzamientos para ganar el juego. Determinan todos los valores posibles que puede tomar la variable X.
- Calculan las probabilidades $P(X = x_i)$ de los valores x_i que puede tomar la variable aleatoria X.

Representar

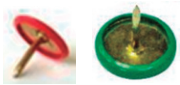
Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos. (OA m)

5. En otro juego de "contar al azar", también se lanza cinco veces una moneda y se anota cara y sello, respectivamente. Se cuentan los cambios de cara a sello y al revés. Se gana con el mayor número de cambios. Luego las alumnas y los alumnos:
   - Elaboran un árbol o una tabla de posibilidades para cinco lanzamientos.
   - Responden cuáles son los números posibles que resultarán del conteo.
   - Una variable aleatoria X representa los números posibles. Calculan las probabilidades $P(X = x_i)$ de los valores x_i que puede tomar la variable aleatoria X.

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)

6. Se lanza un chinche tres veces y después de cada lanzamiento se anota en qué parte ha caído. En el dibujo se muestra el evento "punta *p*"; el otro evento se llama "cabeza *c*".



Para el evento "cabeza" se obtiene un punto positivo y para el evento "punta" se obtiene un punto negativo. Se suman los puntos obtenidos en tres lanzamientos. Luego completan la siguiente tabla:

EVENTO	PUNTOS OBTENIDOS
ccc	3
ppp	–3

- Una variable aleatoria X representa los puntos obtenidos en tres lanzamientos. Relacionan los valores x_i con los eventos correspondientes.
- La probabilidad del evento "cabeza" se estima en 40 %. Calculan todas las probabilidades $P(X = x_i)$.

7. Un test de conocimiento, de selección múltiple, tiene en total 6 preguntas. Para cada pregunta se proponen tres respuestas, de las cuales solo una es la exacta. Una persona que tiene poco conocimiento de la materia que se está evaluando decide responder las 6 preguntas al azar. Consideran la variable aleatoria para las respuestas correctas como X.

- ¿Qué valores x_i puede tomar la variable X?
- Calculan las probabilidades $P(X = x_i)$ de los valores x_i que puede tomar la variable X.
- Se aprueba el test si la mayoría de las respuestas es correcta. ¿Con qué probabilidad se aprueba el test, estando seguro de la primera respuesta y contestando el resto de las preguntas al azar?

PREGUNTA			
1	A	B	C
2	A	B	C
3	A	B	C
4	A	B	C
5	A	B	C
6	A	B	C

Resolver problemas

Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático. (OA c)

Objetivos de Aprendizaje

OA 11

Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

Actividades

Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)

1. En una carrera de Fórmula 1, los autos no parten de la misma línea. Se fija una posición de partida para cada uno, según los resultados del entrenamiento. Una buena posición de partida mejora la posibilidad de ganar la carrera. Los mejores pilotos actuales del torneo, como Vettel, Alonso, Hamilton y Räikönen, siempre luchan por las primeras cuatro posiciones de partida.

- Determinan sistemáticamente todas las permutaciones de las cuatro posiciones de partida; por ejemplo: la permutación (V, A, H, R) significa primera posición Vettel; segunda posición, Alonso; tercera posición, Hamilton; y cuarta posición, Räikönen.
- Responden cuántas permutaciones habrá si se considera adicionalmente la quinta posición de partida. Explican las respuestas sin mencionar todas las permutaciones.

Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)

2. El profesor de Matemática va al colegio solamente con camisas blancas o moradas. Para variar su presencia tiene, además, tres tipos de corbatas: unicolores, rayadas y punteadas.

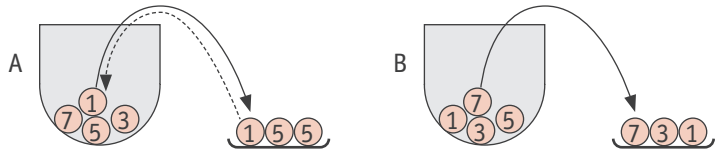
- ¿Es posible que el profesor vaya al colegio los cinco días de la semana con diferentes tipos de combinaciones, sin repetir ninguna?

- Explican y comunican la respuesta mediante un cálculo.
- El profesor quiere aumentar sus posibilidades de combinaciones y agregar a su colección otro tipo de corbata o de camisa. ¿Se dará el mismo resultado si elige una camisa adicional o una corbata adicional? Explican y comunican las respuestas.

3. En un recipiente hay cuatro bolitas numeradas con números impares del 1 al 7. En el experimento A, se saca una bolita, se anota el número y se la devuelve al recipiente. Se repite el proceso dos veces, para formar un número de tres dígitos. En el experimento B también se sacan tres bolitas, de a una, pero sin devolverlas al recipiente.

Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)



- Determinan sistemáticamente la cantidad de números posibles de tres dígitos para el experimento A.
- Determinan sistemáticamente la cantidad de números posibles de tres dígitos para el experimento B.
- Responden: ¿Se pueden obtener los mismos resultados si, en vez de sacar tres veces una bolita de un recipiente, se saca una sola vez de tres recipientes distintos, cuyas bolitas están numeradas con 1, 3, 5 y 7? Explican y comunican las respuestas.

4. El directorio de un club deportivo está compuesto por 4 personas. Como ninguna de ellas quiere asumir los cargos de presidente o presidenta, ni de vicepresidente o vicepresidenta, deciden elegirlas al azar con el siguiente procedimiento: anotan los nombres en cuatro papelitos, los echan en una bolsa y después sacan al azar, de a uno, dos papelitos. El primero corresponderá al presidente o la presidenta, y el segundo, al vicepresidente o la vicepresidenta.

Modelar

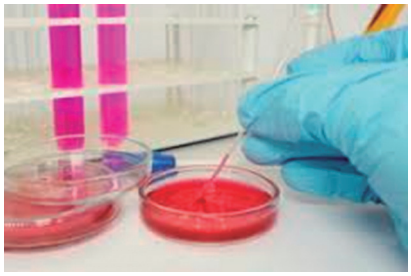
Ajustar modelos acercándolos a la realidad. (OA j)

a. Modelan la elección con una urna que contiene cuatro bolitas numeradas de 1 a 4.
b. Determinan sistemáticamente el número de combinaciones posibles de dos personas.
c. Calculan la probabilidad de un cierto par de personas para presidente o presidenta, y vicepresidente o vicepresidenta.
d. Dentro del directorio hay una persona que de ninguna manera quiere ser presidente o presidenta, ni vicepresidente o vicepresidenta. Calculan la probabilidad de que se salve uno de los cargos.

Modelar

Ajustar modelos acercándolos a la realidad. (OA j)

5. En el desarrollo de un medicamento trabajan cuatro científicos; se elegirá a dos de ellos para que gestionen la parte financiera de la investigación. No habrá ninguna prioridad entre las personas elegidas.



a. Elaboran un modelo para la elección azarosa de las personas encargadas de la parte financiera.

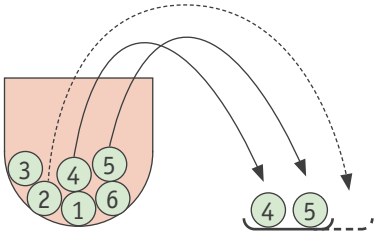
b. Responden: ¿Cuántas posibilidades de pares de personas hay?

c. Comparan el número de posibilidades con el resultado del ejercicio c de la actividad anterior. Explican y comunican la diferencia.

Argumentar y comunicar

Demostrar resultados e identificar saltos o errores en el proceso. (OA g)

6. El centro de alumnos de un colegio pretende realizar una rifa a modo de "mini loto", con 6 bolitas numeradas del 1 al 6. Todavía no saben si harán un sorteo del tipo "2 de 6" o "3 de 6".



- Los alumnos y las alumnas conjeturan acerca de qué tipo de sorteo tiene más posibilidades: el "2 de 6" o el "3 de 6".
- Determinan sistemáticamente el número de posibilidades para los dos tipos de sorteo.
- Conjeturan, sin realizar ningún cálculo, acerca del número de posibilidades de ambos sorteos, sin importar el orden de los números sorteados. Razonan y comunican la conjetura.

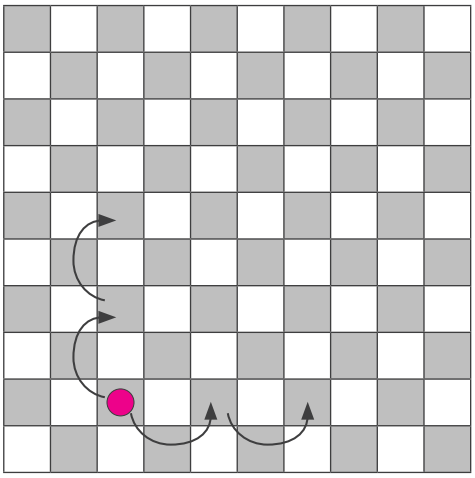
Observaciones a la o el docente

Se sugiere al profesor o la profesora usar este tema para resaltar y valorar el aporte de los datos cuantitativos para comprender la realidad social. (OA E)

7. En una tabla de cuadrículas como tablero de ajedrez se realiza la siguiente actividad: se puede saltar a la próxima cuadrícula blanca directamente hacia arriba o hacia la derecha. Se pueden dar cuatro saltos seguidos a partir de la cuadrícula en la esquina izquierda inferior blanca, pero no más de dos veces en la misma dirección. Se marca la posición de la meta, se vuelve a la partida y se sigue con otra combinación de cuatro saltos, etc.

Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)



- Determinan las 16 cuádruples posibles; por ejemplo: (d, d, a, a), que significa los primeros dos saltos hacia la derecha y los últimos dos saltos hacia arriba.
- Marcan todas las cuadrículas que pueden ser metas de cuatro saltos.
- Si se realiza un paseo al azar, de cuatro saltos seguidos, según las reglas, la probabilidad de un salto hacia arriba es de 0,5, igual que la probabilidad de un salto hacia la derecha. Determinan las probabilidades para llegar a las diferentes metas, aplicando la regla multiplicativa y aditiva.

8. Se realiza un juego del "paseo al azar", basado en la actividad anterior.

Resolver problemas

Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

- Se confeccionan las 16 tarjetas con las combinaciones para llegar a una meta posible en el tablero.
- Se echan las tarjetas en una bolsa, se saca al azar una tarjeta y se pone una ficha o una moneda en la meta que indica el paseo marcado en la tarjeta. Se devuelve la tarjeta y se sigue con el sorteo. Si un paseo llega a la misma meta, se apilan las fichas o las monedas.
- Después una gran cantidad de sorteos, verifican si las alturas de las pilas de las fichas representan aproximadamente las probabilidades calculadas en la actividad anterior.

Objetivos de Aprendizaje

OA 12

Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad:

- **Revisando informaciones de los medios de comunicación.**
- **Identificando suposiciones basadas en probabilidades.**
- **Explicando cómo una probabilidad puede sustentar suposiciones opuestas.**
- **Explicando decisiones basadas en situaciones subjetivas o en probabilidades.**

Actividades

Argumentar y comunicar

Demostrar resultados e identificar saltos o errores en el proceso. (OA g)

1. Revisan diarios, revistas u otros medios de información para encontrar artículos, noticias e informaciones que estén relacionadas con probabilidades; por ejemplo:
   - Probabilidad en pronósticos de tiempo.
   - Probabilidad en el desarrollo económico.
   - Probabilidad de enfermarse de …
   - Probabilidades electorales.
   - Probabilidad en expectativas de sobrevivencia.
   - Probabilidades en la vida social.

   a. Registran las informaciones en las categorías mencionadas.
   b. Mencionan los métodos de la representación.
   c. Informan acerca de posibles inexactitudes o errores de la información.
   d. Comentan acerca de las manipulaciones de la información y los motivos de esta.

Observaciones a la o el docente

Se recomienda realizar la actividad en grupos que buscan las informaciones en medios diferentes, para representar y comentar los resultados frente al curso.

Se sugiere recordar a los alumnos y las alumnas que usen las tecnologías disponibles en forma responsable y efectiva. (OA F)

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA f de 2° medio.**

2. Un club de interesados en astronomía quiere organizar una competencia de observaciones astronómicas, para lo cual se requieren, por lo menos, tres días seguidos de cielo despejado. Para planificar la mejor fecha en el período entre noviembre y abril, disponen de datos meteorológicos de la zona, basados en observaciones realizadas durante los últimos 25 años.

Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)

MES	NOV.	DIC.	ENE.	FEB.	MAR.	ABR.
Probabilidad de que el día esté nublado (%)	28	25	16	17	14	21

Determinan los porcentajes de los días de cielo despejado.

Los organizadores del evento quieren un porcentaje de por lo menos un 60 % de probabilidad estimada para tres días seguidos de cielo despejado. Responden en qué meses sería conveniente realizar la competencia.

Observaciones a la o el docente

Se sugiere aprovechar esta actividad para resaltar y valorar el aporte de los datos cuantitativos para comprender la realidad o el ambiente que nos rodea. (OA E)

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA d de 2° medio.**

Resolver problemas

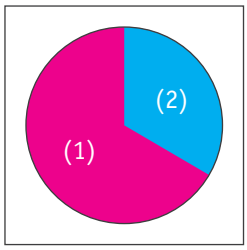
Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

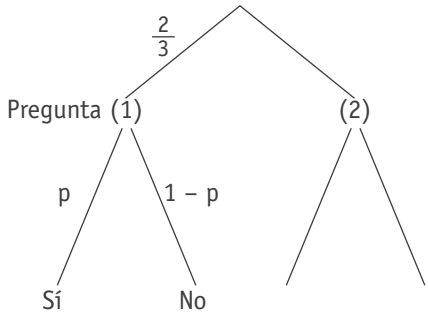
Modelar

Evaluar modelos comparándolos y determinando sus limitaciones. (OA k)

3. En algunas ocasiones, las preguntas estadísticas en encuestas son incómodas para los encuestados, que en estos casos se niegan a contestarlas. Por ejemplo, si la pregunta es "¿Copiaste alguna vez en una prueba o un examen de universidad?", se busca la parte de la población que lo hizo y se señala con una *p*. Una muestra de 300 personas de la población acepta ser encuestada si se le garantiza el anonimato.

- La encuesta se efectúa de la siguiente forma:
- Se formula la pregunta (1), directa: ¿Copiaste una vez?
- Se formula la pregunta (2), inversa: ¿Nunca copiaste?
- Con una rueda de la fortuna, se elige al azar quién o quiénes reciben la pregunta directa (1) o la inversa (2).





- Completan el árbol de posibilidades.
- Marcan los caminos que llevan a la respuesta "Sí".
- Elaboran la expresión algebraica que lleva al "Sí", mediante la variable *p*.
- De la muestra de 300 personas, 128 contestan "Sí". Determinan la parte *p* de la población que ya copió una vez.
- Expresan la parte *p* en %.

Observaciones a la o el docente

Se sugiere fomentar la privacidad de las personas y mencionar que los datos son anónimos y no pueden ser divulgados.

4. Para calificar a una selección de tenis, el tenista A debe jugar en un máximo de tres partidos con los tenistas B y C en forma alternada. El jugador A se integrará a la Selección si logra ganar dos partidos seguidos. Se sabe que el tenista B tiene mejor rendimiento que el tenista C.

Modelar

Ajustar modelos acercándolos a la realidad. (OA j)

- Conjeturan acerca de con quién debería empezar a jugar el tenista A.
- Elaboran una tabla o un árbol de probabilidades para afirmar o rechazar la conjetura.

- Aplican el modelo de esta actividad a la siguiente situación: una empresa quiere lograr la aprobación de un proyecto frente a dos grupos, B y C, que deciden sobre la aceptación o el rechazo del proyecto en un máximo de tres gestiones alternadas. Se logra la aprobación si se consigue la aceptación de B y C, en dos intentos seguidos. El grupo B tiende más al rechazo del proyecto que el grupo C. Responden: ¿Con qué grupo se deben comenzar las gestiones para lograr más fácilmente la aprobación del proyecto?

Observaciones a la o el docente

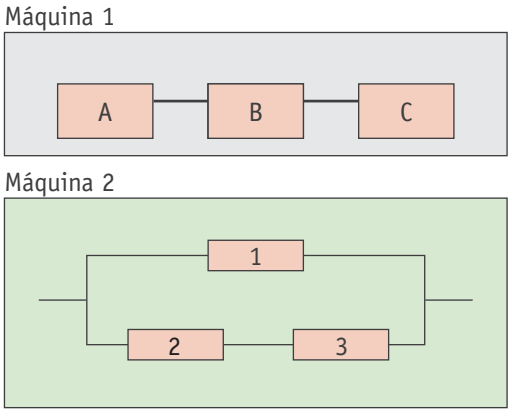
Se sugiere comentar con las alumnas y los alumnos que, en este contexto, se tomarían decisiones según los conocimientos matemáticos. (OA E)

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA l de 2° medio.**

Modelar

Ajustar modelos acercándolos a la realidad. (OA j)

5. En la máquina 1 de producción hay tres elementos -A, B y C- que tienen las siguientes probabilidades estimadas de fallar: $p_A = 0{,}005$, $p_B = 0{,}01$ y $p_C = 0{,}015$. Los elementos están unidos mediante una conexión en serie.



- Calculan la probabilidad de fallar para la máquina 1.
- Para la máquina 2, se decide cambiar la conexión de los elementos A, B y C. Conjeturan acerca de la probabilidad de que la máquina 2 falle, en comparación con la máquina 1. Explican y comunican la respuesta.
- ¿En cuáles de las posiciones se deben armar los elementos A, B y C para que la máquina 2 tenga una mínima probabilidad de fallar?

Argumentar y comunicar

Demostrar resultados e identificar saltos o errores en el proceso. (OA g)

6. En el marco de un proyecto de estadística, un grupo de alumnos y alumnas realizó encuestas acerca de tres preguntas de interés. Pregunta 1: ¿Será lluvioso el próximo año? Pregunta 2: ¿Subirá el cambio del peso chileno frente dólar estadounidense el próximo año? Pregunta 3: ¿Clasificará la selección chilena para el próximo mundial de fútbol? Las tres preguntas fueron respondidas por cada persona. El resultado se registra en la siguiente tabla:

PREGUNTA N°	1	2	3
PORCENTAJE DE "SÍ"	30 %	70 %	90 %

- Estiman el porcentaje de un año lluvioso y la clasificación de la selección chilena de fútbol al mundial, basándose en la encuesta.
- Responden con qué probabilidad pueden ocurrir los tres eventos.

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA g de 2° medio.**

7. Se planifica realizar, por separado, una encuesta de tres preguntas a tres grupos diferentes de una población: pregunta 1 al grupo A, pregunta 2 al grupo B y pregunta 3 al grupo C.

- Pregunta 1: ¿Subirá el precio del cobre el próximo año?
- Pregunta 2: ¿Bajará el cambio del peso chileno el próximo año?
- Pregunta 3: ¿Subirán las exportaciones de Chile el próximo año?

Sobre la base de los porcentajes recibidos, ¿se puede estimar la probabilidad de ocurrencia de los tres eventos? Conjeturan acerca de posibles fallas en la planificación de la encuesta. Explican y comunican las conjeturas.

Argumentar y comunicar

Demostrar resultados e identificar saltos o errores en el proceso. (OA g)

Modelar

Ajustar modelos acercándolos a la realidad. (OA j)

Observaciones a la o el docente

Se sugiere poner énfasis en la necesidad de usar las tecnologías de la información en forma responsable. (OA F)

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA g de 2° medio.**

8. Un grupo de diez turistas debe pasar por el control en la aduana. Cuatro de ellos llevan un producto no permitido. Se elige a dos personas al azar y se las obliga a abrir sus maletas.

¿Con qué sorteo, con o sin devolución, se puede representar el control de los diez turistas?

- Basados en el sorteo elegido, elaboran un árbol de probabilidades.
- Determinan la probabilidad del evento “exactamente una de las dos personas elegidas lleva un producto no permitido”.
- Determinan la probabilidad del evento “ninguna de las personas elegidas lleva un producto no permitido”.

Modelar

Ajustar modelos acercándolos a la realidad. (OA j)

Modelar

Ajustar modelos acercándolos a la realidad. (OA j)

9. En la fabricación de cerámica se obtiene aproximadamente un 40 % de productos de primera selección sin fallas. Un 50 % de la producción es de segunda selección y el resto es de desecho. Se producen dos floreros.
   - ¿Con qué sorteo, con o sin devolución, se puede modelar y representar la producción de dos floreros?
   - Basados en el sorteo elegido, elaboran un árbol de probabilidades.
   - ¿Con qué probabilidad se obtiene un producto de la primera selección?
   - ¿Con qué probabilidad se obtiene un producto que no es de desecho?

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA 20 de 1° medio.**

SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN

EVALUACIÓN 1

Objetivos de Aprendizaje

OA 10

Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas:

- **Definiendo la variable.**
- **Determinando los posibles valores de la incógnita.**
- **Calculando su probabilidad.**
- **Graficando sus distribuciones.**

Indicadores de Evaluación

- Elaboran el conjunto de todos los triples de funcionamiento posibles, de manera sistemática.
- Determinan todos los valores que puede tomar la variable aleatoria *X*.
- Calculan el valor que toma la variable aleatoria *X* para eventos dados.
- Determinan los eventos que corresponden a valores dados de la variable aleatoria *X*.

EVALUACIÓN 1

ACTIVIDAD	CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Trabajo en pares:
 	
Se controla el funcionamiento de las tres turbinas (A, B y C) de un avión.
• Si una turbina funciona, se marca con 1; si no funciona, se marca con 0. Completan la tabla siguiente:
 	
• Una variable aleatoria X representa el número de turbinas que funcionan. Determinan el valor de la variable X para los siguientes eventos:
  • Por lo menos dos turbinas funcionan.
  • Como máximo funcionan tres turbinas.
  • Funcionan exactamente dos turbinas.
 	
• Determinan los triples para los siguientes valores de la variable aleatoria X:
  • $X \leq 1$
  • $X = 2$
  • $1 < X \leq 3$
	• Completan sistemáticamente la tabla con 1 y 0.
	• Traducen correctamente las expresiones del lenguaje natural, como "por lo menos", en símbolos matemáticos.
	• Determinan correctamente los valores de la variable X para los eventos dados.
	• Determinan correctamente todos los eventos que corresponden a los valores dados de la variable aleatoria.

A	B	C
1	1	1
1	1	

EVALUACIÓN 2

Objetivos de Aprendizaje

OA 11

Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

Indicadores de Evaluación

- No consideran la aplicación de la fórmula "*n* sobre *k*".
- Reconocen que el orden en que los tres mejores lleguen a la meta no importa, y consideran los 6 triples –por ejemplo (ABC), (ACB), (CBA)- como un solo triple.
- Determinan sistemáticamente todos los triples.
- Calculan correctamente las probabilidades.

ACTIVIDAD	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
La resolución de esta actividad se puede agregar al Portafolio. En el entrenamiento para un campeonato regional de atletismo escolar, el profesor o la profesora realiza una carrera de selección para averiguar cuáles son 3 de los 5 mejores alumnos o alumnas de la competencia de 100 m, para que representen a su colegio. **a.** Responden: ¿Cuántas posibilidades de selección de 3 alumnas o alumnos hay? **b.** Entre los 5 alumnos o alumnas que participan en la carrera, hay 3 del mismo curso. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 estudiantes califiquen para el campeonato, si todos tienen aproximadamente el mismo rendimiento? **c.** Antes de realizar la carrera de selección, una alumna o un alumno se retira voluntariamente. Determinan sistemáticamente las posibilidades de elegir a las 3 alumnas o los 3 alumnos para el campeonato.	• Elaboran un esquema para determinar sistemáticamente los triples de tres alumnos o alumnas. • Determinan correctamente el número de los triples. • Aplican el modelo Laplace para calcular la probabilidad de la actividad b. • Eligen un esquema nuevo para la actividad c, o utilizan el esquema anterior reduciendo el total de participantes.

EVALUACIÓN 3

Objetivos de Aprendizaje

OA 12

Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad:

- **Revisando informaciones de los medios de comunicación.**
- **Identificando suposiciones basadas en probabilidades.**
- **Explicando cómo una probabilidad puede sustentar suposiciones opuestas.**
- **Explicando decisiones basadas en situaciones subjetivas o en probabilidades.**

Indicadores de Evaluación

- Elaboran una representación de las alternativas.
- Relacionan tiempos de atraso con la ocurrencia de tacos.
- Reconocen los principios multiplicativo y aditivo de las probabilidades.
- Determinan las probabilidades.

EVALUACIÓN 3

ACTIVIDAD	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
Esta evaluación se puede registrar en el diario de vida matemático. Para viajar entre dos ciudades grandes (A y B), hay dos rutas alternativas (I y II). En la ruta I hay tres tramos (R, S y T), en los cuales siempre se producen tacos al inicio de fines de semana, con las probabilidades estimadas y tiempos de atraso señalados a continuación. La distancia de un tramo al otro es suficientemente grande como para considerar los tacos como independientes. En la ruta II hay dos tramos: U y W. **Ruta I** • Tramo R, 40 % con 10 min. • Tramo S, 15 % con 10 min. • Tramo T, 20 % con 15 min. **Ruta II** • Tramo U, 15 % con 15 min. • Tramo W, 10 % con 20 min. **a.** Elaboran una representación gráfica de la conexión entre las ciudades A y B, con los tramos, los porcentajes y los tiempos de atraso. **b.** Determinan las siguientes probabilidades para la ruta I: 1. Atraso de 35 min. 2. Atraso de 20 min. 3. Atraso de 25 min. 4. Ningún atraso. **c.** Determinan las siguientes probabilidades para la ruta II: 1. Atraso de 35 min. 2. Atraso de 20 min. 3. Ningún atraso. **d.** Responden: ¿En cuáles de los casos la ruta I sería la mejor alternativa?	• Elaboran la representación gráfica en forma clara y correcta. • Combinan adecuadamente los tiempos de atraso con las probabilidades de ocurrencia de los tacos. • Aplican correctamente la regla multiplicativa de probabilidades, en combinación con la regla aditiva de probabilidades. • Calculan las probabilidades de manera correcta. • Comparan las alternativas y mencionan las ventajas y desventajas de ambas rutas alternativas.

Bibliografía

BIBLIOGRAFÍA PARA EL O LA DOCENTE

Alagia, R., Bressan, M. & Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Alvarado, M. & Brizuela, M. (2005). *Haciendo números: Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia*. Barcelona: Paidós Educador.

Alsina, C., Pérez, R. & Ruiz, C. (1990). *Simetría dinámica*. Madrid: Síntesis.

Alsina, C., Burgués, C. & Fortuny, J. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.

Alsina, C., Burgués, C. & Fortuny, J. (1989). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Alsina, C. (1996). *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Graó.

Araya, R. & Matus, C. (2008). *Estadística y probabilidades: Buscando un orden para el azar. Material del estudiante. Unidad estadística y probabilidades*. Santiago, Chile: Universidad de Santiago.

Argüelles, J. (1989). *Historia de la matemática*. Madrid: Akal.

Arias, J. M. y otros (1992). *Hoja de cálculo en la enseñanza de las matemáticas en secundaria*. Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma.

Artigue, M. (1994). "Una introducción a la didáctica de la matemática", en *Enseñanza de la Matemática*. Selección bibliográfica, traducción para el PTFD, MCyE.

Artigue, M., Douday, R. & Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Iberoamericana.

Berlanga, R., Bosch, C. & Rivaud, J. (2001). *Las Matemáticas, perejil de todas las salsas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Boule, F. (2005). *Reflexiones sobre la geometría y su enseñanza*. México: La Vasija.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Bruner, S. (1969). *Hacia una teoría de la instrucción*. México: Uteha.

Callejo, L. (1994). *Un club de Matemática para la diversidad*. Madrid: Narcea.

Cantoral, R. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cañón, C. (1993). *La matemática: Creación y descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

Centeno, J. (1997). *Números decimales: ¿por qué?, ¿para qué?*. Madrid: Síntesis.

Chamorro, M. Belmonte, J. (2005). *Didáctica de las matemáticas para Educación Infantil*. Madrid: Pearson Educación.

Cofré, A. & Tapia, L. (1995). *Cómo desarrollar el razonamiento lógico y matemático*. Santiago de Chile: Universitaria.

Corbalán, F. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Graó.

Coxeter, S. & Greitzer, L. (1994). *Retorno a la geometría*. Madrid: DLS-EULER.

D'Amore, B. y otros. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá , Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

De Burgos, J. (1994). *Curso de álgebra y geometría*. Madrid: Alhambra Longman.

Díaz, J., Batanero, M. & Cañizares, M. (1987). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.

Dolores, C. (2007). *Matemática educativa: Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*. Madrid: Díaz de Santos.

Duhalde, E. & González, M. (2003). *Encuentros cercanos con la matemática*. Buenos Aires: Aique.

Elphick, W. (2001). *101 actividades para implementar los objetos fundamentales transversales*. Santiago de Chile: Tiberíades.

Escalante, M. (2008). *La matemática de los modelos proporcionales: Material del estudiante 1 a*ño medio. Santiago, Chile: Universidad de Santiago.

García, G. (1998). *Heurística geométrica*. México: Limusa.

González, L. (editor). (1990). *Números enteros*. *Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid: Síntesis.

Govinden, P. (1999). *Introducción a la estadística*. Bogotá: McGraw-Hill Interamericana.

Honsberger, R. (1994). *El ingenio en las matemáticas*. Madrid: DLS-EULER.

Johsua, S. & Dupin, J. (2005). *Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática*. Buenos Aires: Colihue.

Lehmann, H. (2001). *Álgebra*. México: Limusa.

Moya, M., Troncoso, M. & Yáñez, M. (2007). *Álgebra: El poder de la generalización. Material del estudiante 1 año medio*. Santiago, Chile: Universidad de Santiago.

Planas, N. & Alsina, A. (2005). *Educación matemática y buenas practicas: Infantil, primaria, secundaria y educación superior*. Barcelona: Graó.

Resnick, B. & Ford, W. (2010). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Reyes, C. & Valenzuela, M. (2006). *Matemática, 1°. medio*. Santiago: McGraw-Hill Interamericana.

Saavedra, G. (2005). *Contenidos básicos de estadística y probabilidad*. Santiago: Universidad de Santiago.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Smith, S. (2006). Álgebra, trigonometría y geometría. Needham, Mass: Pearson Prentice Hall.

Tahan, M. (2002). *El hombre que calculaba*. México: Limusa.

Valenzuela, H. (2006). *Fundamentos de matemática universitaria. Álgebra y Cálculo*. Madrid: Pearson/Prentice-Hall.

Villanueva, F., Arenas, F. & Masjuán, G. (1993). *Geometría elemental*. Santiago: Universidad Católica de Chile.

Villella, A. (2001). *Uno, dos, tres... Geometría otra vez: De la intuición al conocimiento formal en la EGB*. Buenos Aires: Aique.

SITIOS WEB RECOMENDADOS

Ministerio de Educación de Chile
www.mineduc.cl

Instrumentos curriculares (Programas de Estudio, etc.)
www.curriculum-mineduc.cl

Instituto Nacional de Estadísticas
www.ine.cl

Red Maestros de Maestros (Mineduc)
www.rmm.cl

Key Currículum Press (textos de matemática)
http://www.keycurriculum.com/resources

Geometría
http://hp.fciencias.unam.mx/ensmat/matsinter/g_m.html

Potencias
http://hp.fciencias.unam.mx/ensmat/matsinter/cl_f_potencias_m.html

Textos para el o la docente y el o la estudiante de Educación Secundaria, México
www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/recdidactico.html

Telesecundaria México. Secretaría de Educación Pública
http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/

RECURSOS DIGITALES INTERACTIVOS EN LA WEB

Portal Educar Chile: Recursos Generales Interactivos para el o la docente
www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/verContenido.aspx?ID=186119

Enlaces: Recursos Educativos Digitales
www.catalogouce.cl/recursos-educativos-digitales?nivel_educativo=50&subsector_basica=65

Proyecto Descartes, España: Matemáticas Interactivas
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/

Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales, applets de la Universidad de UTAH
http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html

Eduteka, Portal Educativo, Colombia: Matemática Interactiva
www.eduteka.org/MI/master/interactivate

BIBLIOGRAFÍA PARA EL O LA ESTUDIANTE

Araya, R. & Matus, C. *Estadística y probabilidades: Buscando un orden para el azar. Material del estudiante. Unidad estadística y probabilidades*. Santiago: Universidad de Santiago.

Dussling, J. & Thornburgh, M. (2005). *El problema de 100 libras*. New York: Kane Press.

Enzensberger, M., Berner, S. & Fortea, C. (2007). *El diablo de los números: Un libro para todos aquellos que temen a las matemáticas*. Madrid: Siruela.

Kassirer, S. & Smath, J. (2005). *La feria musical de matemáticas*. New York: Kane Press.

Honsberger, R. (1994). *El ingenio en las matemáticas*. Madrid: DLS-EULER.

Oster, G. (2008). *El gran libro de las matemáticas del ogro feroz*. Barcelona: Oniro.

Ramírez, B., Penner, R. & Smath, J. (2007). ¡*Apaguen las luces!* New York: Kane Press.

Tahan, M. (2002). *El hombre que calculaba*. México: Limusa.

PÁGINAS WEB RECOMENDADAS

Matemáticas: Textos para el y la docente y el o la estudiante de educación secundaria, México:
www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/recdidactico.html

RECURSOS DIGITALES INTERACTIVOS EN LA WEB

Proyecto Descartes, España: Matemáticas Interactivas
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/

Aplicaciones de Matemática
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/aplicaciones.php

Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales, applets de la Universidad de UTAH:
http://nlvm.usu.edu/es/nav;

Enlaces directos

- Números y operaciones
  http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_3_t_1.html
- Álgebra
  http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_3_t_2.html
- Geometria
  http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_3_t_3.html
  http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_3_t_4.html
- Análisis de datos y probabilidad
  http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_3_t_5.html
- Portal Educar Chile: Recursos Generales Interactivos para el o la docente
  www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/verContenido.aspx?ID=186119
- Enlaces: Recursos Educativos Digitales
  www.catalogouce.cl/recursos-educativos-digitales?nivel_educativo=50&subsector_basica=65
- Eduteka – Matemáticas Interactivas
  http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/
- Eduteka – Recursos
  http://www.eduteka.org/tag/recursos_inicio/recientes/1
- Geometría
  http://www.eduteka.org/recursos/recursos_inicio/matematicas/geometria/1
- Álgebra
  http://www.eduteka.org/recursos/recursos_inicio/matematicas/algebra/1
- Aritmética
  http://www.eduteka.org/recursos/recursos_inicio/matematicas/artimetica/1

TODAS LAS UNIDADES

Blum, R., (2008). *Festival de ingenio*. Santiago de Chile: RIL.

Burgués, C., Codina, R., Montanuy, M. & Inaraja, C. (2007). *Apuntes de matemáticas*. Barcelona: Parramón.

Collantes, J. & Pérez, A. (2006). *Matecuentos cuentamates: Cuentos con problemas*. [3]. Madrid: Nivola.

Gardner, M. (2008). *El idioma de los espías*. Santiago de Chile: RIL.

Moscovich, I. & Castañeda, I. (2007). *Imaginación geométrica*. Naucalpan, México: La Vasija.

Sierra, J. & Núñez, P. (2000). *El asesinato del profesor de Matemáticas*. Madrid: Anaya.

Snape, C., Heather, S. & Escoffié, H. (2005). *¡Sal si puedes! Laberintos y rompecabezas matemáticos*. México: Limusa.

Varios autores. (2005). *Usa las matemáticas: soluciona desafíos de la vida real*. Madrid: Alfaguara.

MATERIALES

Geometría:
Varios autores. Sólidos geométricos. Learning Resources.

VIDEOS

Poliedros regulares I
http://www.educatina.com/trigonometria/poliedros-regulares-1

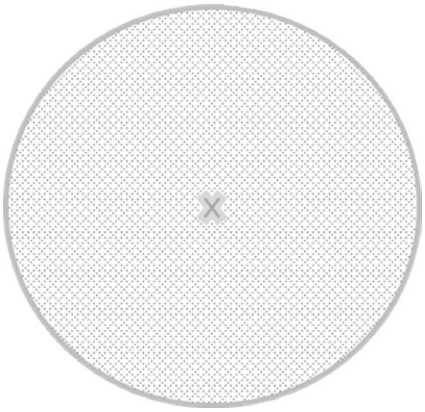
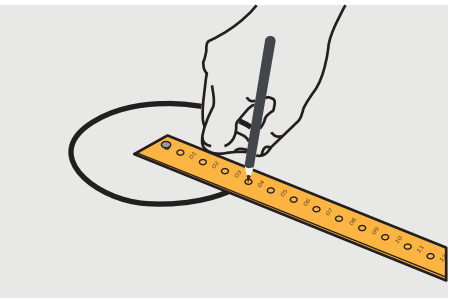
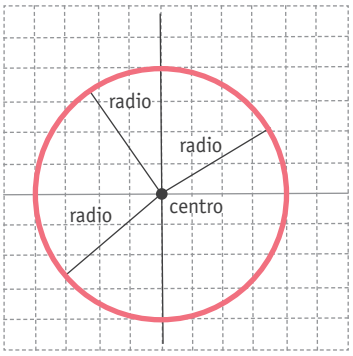
Poliedros regulares II
http://www.educatina.com/trigonometria/poliedros-regulares-2

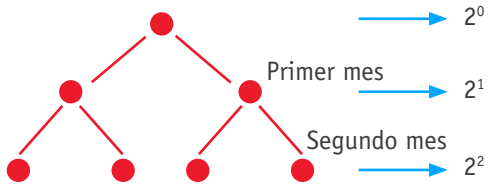
Cuerpos de base circular
http://www.educatina.com/trigonometria/cuerpos-base-circular

Anexos

ANEXO 1

GLOSARIO

<table>
<tr><td>Círculo como lugar geométrico</td><td colspan="2">Un lugar geométrico es un conjunto de puntos del plano que cumplen cierta propiedad.
El círculo, como lugar geométrico, es el conjunto de puntos en el plano que están a menor o igual distancia de un punto denominado centro.
  </td></tr>
<tr><td rowspan="3">Circunferencia como lugar geométrico</td><td colspan="2">La circunferencia, como lugar geométrico, es el conjunto de puntos en el plano que equidistan de un punto denominado centro.
Se puede relacionar con el perímetro de un círculo.</td></tr>
<tr><td>Con uso de material concreto: considerando la misma distancia desde un centro</td><td>En el plano cartesiano</td></tr>
<tr><td>  </td><td> 
</td></tr>
</table>

Combinatoria	Una combinación es la forma de seleccionar posibles objetos de un determinado grupo de elementos, sin importar el orden de estos. Ejemplo: ¿De cuántas maneras se pueden formar parejas de trabajo en una sala con 5 estudiantes? Si son 5 estudiantes A, B, C, D, E, las parejas de trabajo pueden ser las siguientes: AB AC AD AE BC BD BE CD CE CB $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ $C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = 10$ Las combinaciones son 10, es decir, hay 10 formas diferentes de armar las parejas de trabajo.
Crecimiento y decrecimiento de cantidades en forma porcentual constante	Ejemplo 1: Una enfermedad se ha propagado mediante un crecimiento exponencial; cada vez se propaga el doble del mes anterior.  Ejemplo 2: El pago de arriendo se reajusta un 5% cada 6 meses; si el arriendo es de $200.000, ¿cuánto se pagará al año y medio? Inicio: $ 200 000 Al sexto mes: $ 200 000 • 1,05 Al año: $ 200 000 • 1,05 • 1,05 = $ 200 000 • $(1,05)^2$ Al año y medio: $ 200 000 • 1,05 • 1,05 • 1,05 = $ 200 000 • $(1,05)^3$ Al año y medio se pagará: $ 231 525

Ejemplo 3:

La intensidad de la luz decrece por cada metro de profundidad por mismo porcentaje del valor anterior, por ejemplo por cada metro disminuye en 10%.

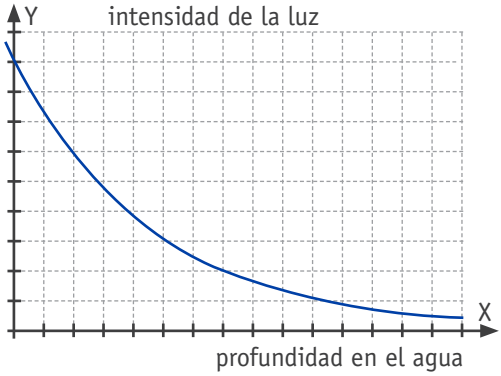
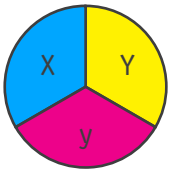


Diagrama de árbol

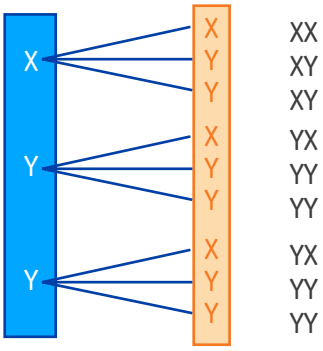
En probabilidad, el diagrama de árbol permite tener una visión general del problema. Se comienza poniendo una rama por cada posibilidad; al final de cada rama se hace un "punto" para iniciar otra rama, según las posibilidades del siguiente evento. Se debe tener presente que la adición de las probabilidades de cada rama debe dar 1.

Ejemplo 1:

Una ruleta se divide en tres regiones iguales con distinto color. Si la ruleta gira dos veces:



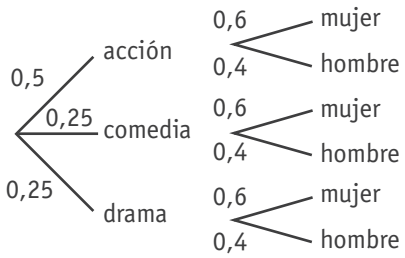
a) Dibujan un diagrama de árbol para representar el espacio muestral para dos vueltas de la flecha en la ruleta.



b) ¿Cuál es la probabilidad de que al dar dos vueltas caiga en X primero y luego en Y? Observando las combinaciones, existen 2 casos favorables y 9 opciones de combinar; entonces la probabilidad es $\frac{2}{9}$.

Ejemplo 2:

En un curso se pregunta cuál es su género de película favorita; las categorías son acción, comedia o drama. Un 50% prefiere acción, un 25% comedia y el otro 25% drama. Si las mujeres representan un 60% del curso, ¿cuál es la probabilidad de encontrar una alumna a la que le guste la acción?



La probabilidad de encontrar una alumna a la que le guste la acción es 0,5 • 0,6 = 0,3, es decir, un 30% de las alumnas.

La adición de las ramas es
0,5 • 0,6 + 0,5 • 0,4 + 0,25 • 0,6 + 0,25 • 0,4 + 0,25 • 0,6 + 0,25 • 0,4 = 1

Diagrama de cajón

Permite hacer una representación gráfica de los cuartiles.

Ejemplo:

Se ha registrado en segundos el tiempo que los trabajadores de una central telefónica demoran en contestar una llamada:

10	20	25	26	27	32	33	34	52	53
56	60	70	75	80	96				

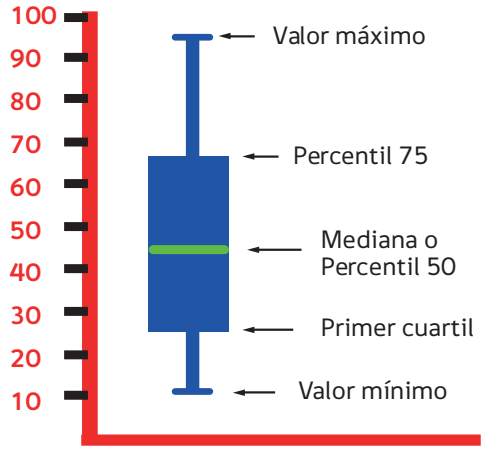
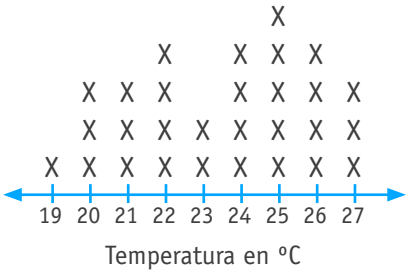


Diagrama de punto	Diagrama que permite exhibir rápidamente datos sobre una recta. Ejemplo: **Temperaturas máximas en el mes de octubre** 
Diagrama de tallo y hoja	Representación gráfica que permite mostrar datos en orden de valor de posición. Ejemplo: Los números de dos cifras se pueden organizar usando un diagrama de tallo y hojas, el dígito de las decenas es un tallo y el de las unidades es una hoja. En el caso de los números 24 26 28 30 35 38 39 41 45 47 Tallo | Hoja 2 | 4 6 8 3 | 0 5 8 9 4 | 1 5 7
Efecto de un dato categórico en una muestra	Consiste en analizar la incidencia de un dato categórico cuando este pertenece o no a la muestra. Ejemplo: Las notas de un curso fueron 7,0; 6,7; 6,3; 5,8; 5,8; 3,5; 5,5; 6,1. El promedio del curso es de 5,8; sin embargo, si se calcula el promedio sin el dato categórico (diferente) en la muestra (3,5), el promedio del curso sería 6,2 (aproximado a la décima).
Espacio muestral	Son todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Ejemplo: Se hace el experimento de sacar una bolita de una bolsa que contiene bolitas enumeradas del 1 al 5. Espacio muestral: {1,2,3,4,5}

Estimar porcentaje de una característica de población

Mediante muestreo se estima el porcentaje de la población con cierta característica; se utiliza la frecuencia relativa y las nociones básicas del muestreo.

Ejemplo1: determinar el porcentaje correspondiente a cada color.

- Se sabe que en hay 10 bolitas en una caja, entre blancas y negras.
- ¿Cómo es posible determinar el total de bolitas blancas y negras sin sacarlas todas de la caja?
- Realizan un muestreo y estiman el porcentaje de blancas y de negras, mirando de vez en vez y anotando el color observado.

Ejemplo 2: determinar el porcentaje correspondiente a cada color.

- Una botella contiene 50 caramelos de color rojo, azul y verde. No se sabe cuántos de cada color hay, porque la botella no es transparente; solo se puede ver el color de cada caramelo al voltearla y abrir la tapa. Además, si se sacude la botella y se vuelve abrir la tapa, puede ser que cambie el color del caramelo que está justo en la tapa.
- Durante varios días se sacudió 1000 veces la botella y se anotó el color de cada caramelo, como se muestra a continuación:

CARAMELO	Rojo	Azul	Verde
FRECUENCIA	452	356	192

Los y las estudiantes responden: ¿qué porcentaje de caramelos de color rojo estiman que hay en la botella?

Evento simple

Ejemplo:

Lanzar dos monedas y que salgan dos sellos.

Espacio muestral: {(cara, cara), (cara, sello), (sello, cara), (sello, sello)}

Evento simple: (sello, sello)

Evento compuesto

Es la combinación de varios eventos simples.

Ejemplo:

Lanzar dos dados y que la adición sea 5.

Evento compuesto: {(3,2); (2,3); (4,1); (1,4)}, se compone de 4 eventos simples.

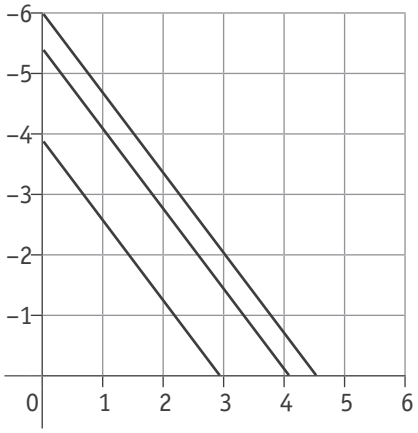
Función por medio de cambio lineal	Se describe la función lineal como un cambio constante entre sus variables "y" y "x". Ejemplo 1: Una persona vende a $200 cada alfajor. ¿Cuál será el ingreso después de vender 35 alfajores? Como la variación entre vender 1 y 2 alfajores fue $ 200, entre 3 y 4 fue $ 200, es decir, se mantiene constante. El ingreso por la venta de alfajores es de $ 7.000. Ejemplo 2: Una persona responde 30 mails cada 20 minutos; si su trabajo se mantiene constante, ¿en cuánto tiempo responderá 90 mails? Como el cambio entre las variables "minutos" y "cantidad de mails" se mantiene constante, entonces responderá 90 mails en 60 minutos.
Funciones en dos variables **f(x,y) = ax + by**	Dada la función perímetro de parcelas rectangulares $f(x,y) = 2x + 2y$, la representación gráfica se puede interpretar como la superficie en el espacio y su proyección sobre el plano será su domino. Para graficar la función anteriormente señalada, considerar los siguientes valores correspondientes a perímetros: 6, 8 y 12. Por último, dibujar las funciones asociadas a los perímetros dados anteriormente.  Se debe hacer notar que la gráfica para infinitos valores de "*x*" e "*y*" corresponde a un plano en el espacio.

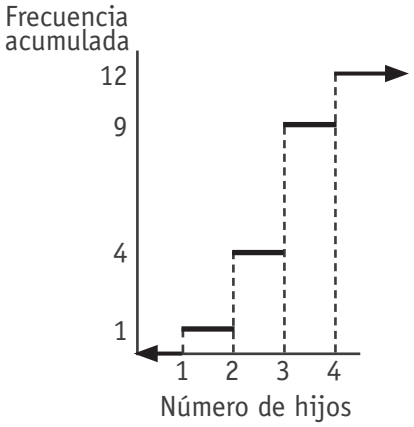
Gráfico de percentiles

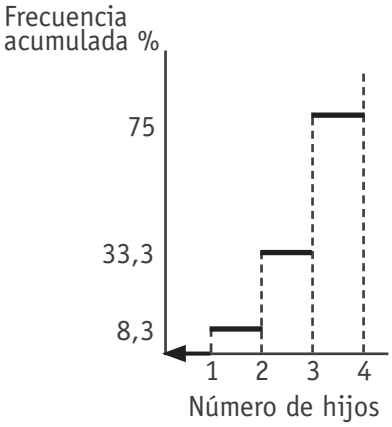
Se construye con las frecuencias acumuladas de la muestra. También puede construirse según la frecuencia acumulada porcentual.

Ejemplo:

El gráfico siguiente muestra a 12 familias según su cantidad de hijos.

NÚMERO DE HIJOS	FRECUENCIA	FRECUENCIA ACUMULADA	FRECUENCIA PORCENTUAL ACUMULADA
1	1	1	8,3%
2	3	4	33,3%
3	5	9	75%
4	3	12	100%

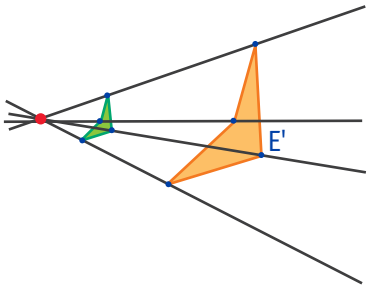




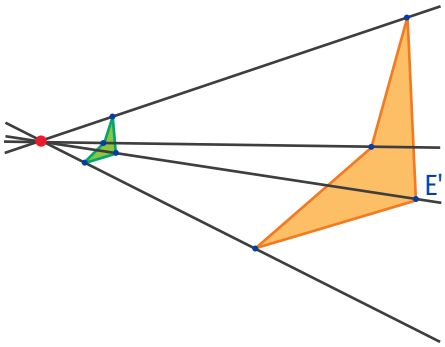
Homotecia relacionada con la perspectiva

La homotecia es una transformación de una figura en el plano, que permite amplificar la forma de dicha figura (conservando la medida de sus ángulos) por medio de una razón.

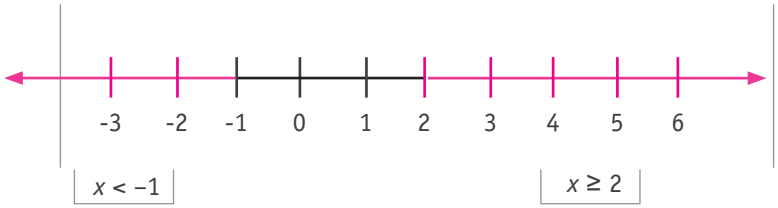
Mediante el proceso de homotecia es posible construir figuras en perspectiva.



Homotecia en razón 3



Homotecia en razón 5

Inecuaciones por medio de representaciones gráficas	 Las inecuaciones en una variable se representan en la recta numérica. En la recta numérica, la parte coloreada a la izquierda representa el conjunto solución de la inecuación $x < -1$; la parte coloreada a la derecha representa el conjunto solución de la inecuación $x \geq 2$.
Interés simple	Es aquel interés que se aplica sobre el capital inicial en cada periodo. Por lo tanto, el rendimiento (interés) siempre se mantiene. Ejemplo 1: Si se tiene un capital inicial de $ 1 000 000 a un interés simple del 2% anual, el capital al primer año es $1 020 000, y al segundo año es $1 040 000. ¿Cuál será su capital final al cabo de tres años? : $1 060 000 Ejemplo 2: Para un capital inicial "a" y un interés simple del i% prestado en n periodo (meses, años). Entonces: • 1° periodo: $a + a \cdot \frac{i}{100} \cdot 1$ • 2° periodo: $a + a \cdot \frac{i}{100} \cdot 2$ • 3° periodo: $a + a \cdot \frac{i}{100} \cdot 3$ • N° periodo $a\ (1 + \frac{i \cdot n}{100})$ capital final con un i % de interés. • Interés en el periodo n es: $a \cdot \frac{i}{100} \cdot n$

Interés compuesto	Es aquel interés que se obtiene sobre el capital acumulado, es decir, el interés forma parte del capital o base del cálculo nuevo en cada periodo. Ejemplo 1: Si se tiene una cantidad inicial de $ 1 000 000 a un interés compuesto del 2% anual, el capital al primer año es $1 020 000, y al segundo año es $1 040 400. ¿Cuál será su capital final al cabo de tres años?: $1 061 208 Ejemplo 2: Si se tiene un capital inicial "*a*" y un interés compuesto del i% prestado en *n* periodo (meses, años). Entonces: • 1° periodo a $(1 + \frac{i}{100})$ • 2° periodo a $(1 + \frac{i}{100})(1 + \frac{i}{100})$ • 3° periodo $a\ (1 + \frac{i}{100})(1 + \frac{i}{100})(1 + \frac{i}{100})$ • n° mes $a\ (1 + \frac{i}{100})^n \rightarrow$ total de dinero, con un *i* % de interés en un periodo *n*.

Medidas de posición, percentiles, cuartiles

Se utilizan en estadística para describir la posición específica que tiene un dato en relación con el resto de los datos, siempre que estén en orden por categorías.

El **percentil** consiste en ordenar los datos de mayor a menor y dividirlos en 100 partes iguales, en donde el k –ésimo percentil es el número tal que, a lo más, el k% de los datos es menor a ese valor.

Los **cuartiles** son los valores de la variable que dividen los datos ordenados en cuartos.

El primer cuartil, Q1, es el valor tal que, a lo más, el 25% de los datos es menor que ese valor.

El segundo cuartil (mediana), Q2, es el número tal que, a lo más, el 50% de los datos es menor que ese valor.

El tercer cuartil, Q3, es el número tal que, a lo más, el 75% de los datos es menor a ese valor.

El cuarto cuartil es toda la información, por lo tanto, no se acostumbra a mencionarlo.

Percentiles para datos no agrupados

Ejemplo 1:

10 estudiantes tienen las siguientes notas, ordenadas de menor a mayor:

4,7; 4,8; 5,4; 5,7; 5,7; 5,8; 6,4; 6,5; 7; 7;

El percentil 20, es decir, la nota 4,8, significa que el 20% del curso no supera la nota 4,8 y el 80% tuvo nota sobre 4,8.

Ejemplo 2:

En una competencia de triatlón, María llegó en el lugar 25 de 150 participantes; entonces, 125 competidoras llegaron después de María.

La posición de María en el triatlón es el percentil 83, ya que $\frac{125}{150} = 0,8\overline{3}$, es decir, estuvo dentro del 17% que llegó primero.

Percentiles para datos agrupados

Ejemplo:

En un estudio se preguntó a 144 personas cuánto habían gastado en el supermercado. Los resultados se muestran en la tabla:

X: CANTIDAD DE DINERO	$0 < x \leq 4\,000$	$4\,000 < x \leq 8\,000$	$8\,000 < x \leq 12\,000$	$12\,000 < x \leq 16\,000$
NÚMERO DE COMPRADORES	10	32	48	54

Se calcula el 75% de las personas que participan en el estudio, lo que da un total de 108 personas. Se ubica el 108 en el intervalo correspondiente, es decir, en el gasto de 12 000 hasta 16 000.

A continuación, se divide la diferencia del intervalo entre el número de compradores del intervalo, en este caso, es: $\frac{4\,000}{54} = 74,074$.

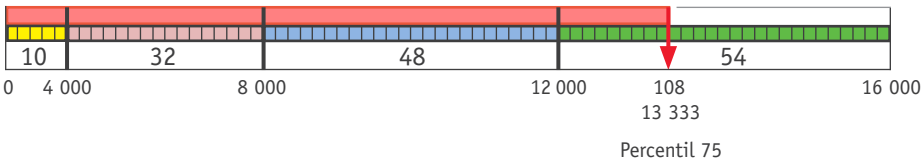
Desde que se inicia el intervalo hasta el 108 hay 18 personas, por lo tanto, se debe multiplicar 74,074 por 18, de lo que se obtiene la diferencia promedio entre comprador y comprador, que es 1333,333 correspondiente a ese intervalo. Como el intervalo comienza en el 12 000, se debe agregar esta diferencia a 12 000.

Es decir, el 75% de las personas encuestadas gastan a lo más $13 333.

En general, se tiene:

$$P75 = 12\,000 + \frac{4\,000}{54} \cdot \left(\frac{144 \cdot 75}{100} - 90\right)$$

$$P75 = 13\,333$$



Observando la representación del percentil 75, una aproximación de este es considerar el promedio del intervalo en donde está agrupado el 75% de los datos:

$\frac{75}{100} \cdot 144 = 108$, el dato 108 está en el intervalo entre 12 000 y 16 000, luego, el promedio entre 12 000 y 16 000 es 14 000.

Entonces, el gasto del 75% de las personas encuestadas no supera, aproximadamente, $ 14 000.

Cuartiles

Ejemplo:

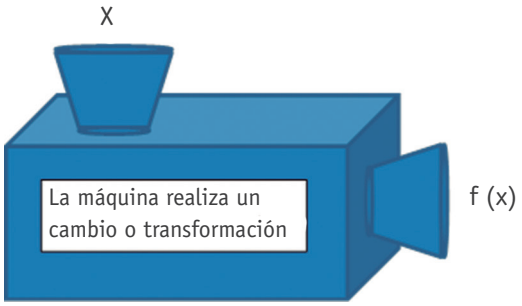
Se ha registrado, por periodos de 15 minutos, el número de vehículos que pasa por la intersección de dos avenidas en cierta cuidad:

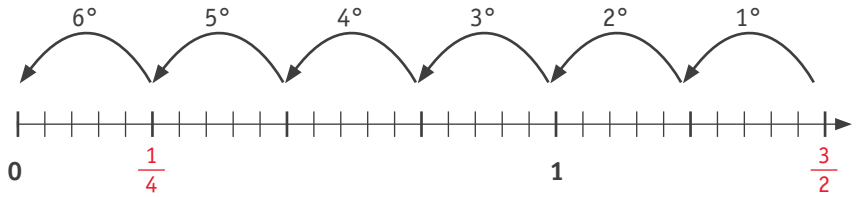
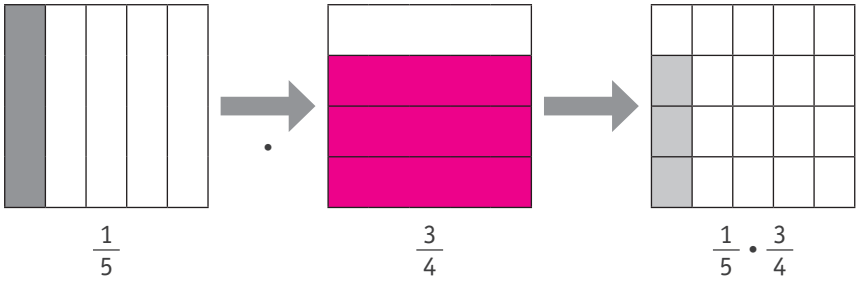
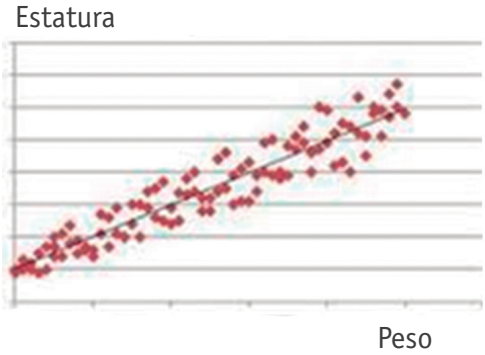
16 21 25 26 26 26 26 28 28 28 28 28 29 29 30 31 32 32 32 36

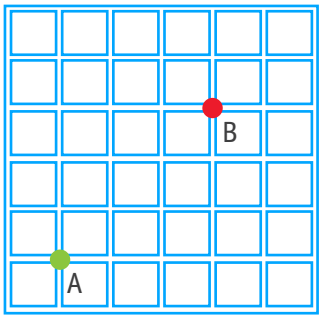
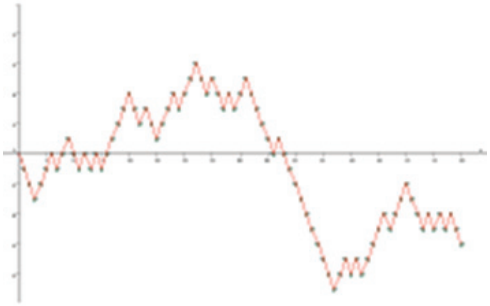
25%	25%	25%	25%

Q_1 Q_2 Q_3

El 25% de los vehículos que transitan en la intersección de dichas avenidas no supera los 26 autos.

Metáforas de máquinas para las funciones	Consiste en identificar el concepto de función con una máquina. Una función es una máquina que “cambia” o “transforma” un elemento que ingresa. Los elementos que ingresan actúan de la misma forma que la variable independiente, y los elementos que egresan actúan igual que la variable dependiente.  Esta metáfora conduce al concepto de función inversa, en el sentido de que la máquina trabaja al revés. Además, se tiene una forma visual para el trabajo con la composición de funciones.
Modelos a escala	Los modelos a escala son una representación de la realidad que permiten determinar las distancias reales. Ejemplo: El siguiente dibujo está a escala 1: 1 000. Midiendo con regla, es posible estimar la distancia real entre A y E según su escala.

Multiplicación y división de fracciones en representaciones pictóricas	**División** Ejemplo: ¿Cuántos saltos del largo $\frac{1}{4}$ se deben realizar para llegar desde la posición $\frac{3}{2}$ a la posición 0? Representando y numerando los saltos se obtiene el resultado correcto: 6.  En representación simbólica: $\frac{3}{2} : \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{1} = 6$ **Multiplicación** Ejemplo: 
Nube de puntos	La distribución de datos con dos características se representa en forma de una nube de puntos en un sistema de coordenadas para visualizar una posible correlación entre dichos datos. Ejemplo: la distribución de datos con dos características (peso/ estatura) Para representar el dato que corresponde al par (xi;yi), se ubica un punto según su coordenada: 

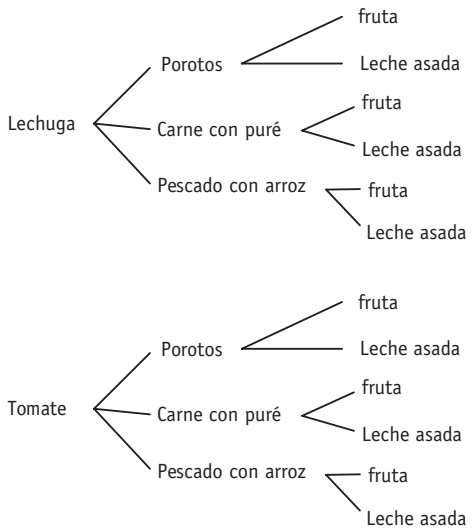
Números naturales en notación científica	Para escribir en notación científica, se descompone el número en potencia de 10. Ejemplo: Se estima que la edad del universo es de 13 700 millones de años aproximadamente, es decir: 13 700 000 000 = 10 000 000 000 + 3 000 000 000 + 700 000 000 $= 1 \bullet 10^{10} + 3 \bullet 10^{9} + 7 \cdot 10^{8}$ $= (1 + 0{,}3 + 0{,}07) \bullet 10^{10}$ $= (1{,}37) \bullet 10^{10}$ $= 1{,}37 \bullet 10^{10}$
Paseos aleatorios	Consiste en graficar la trayectoria que resulta al hacer sucesivos pasos aleatorios. Ejemplo: Una persona está ubicada en el punto A y debe llegar al punto B siguiendo las direcciones arriba o a la derecha. ¿Cuántos caminos puede elegir para llegar?  

Principio multiplicativo

Es un principio básico de conteo. Si hay "a" formas de hacer algo, y "b" maneras de hacer otra cosa, entonces hay a · b maneras de realizar ambas acciones.

Ejemplo:

En un menú del día se dispone de 2 opciones de entrada: lechuga o tomate; 3 opciones de plato de fondo: porotos, carne con puré y pescado con arroz; y 2 opciones de postre: fruta o leche asada. ¿Cuántos menús se pueden escoger?

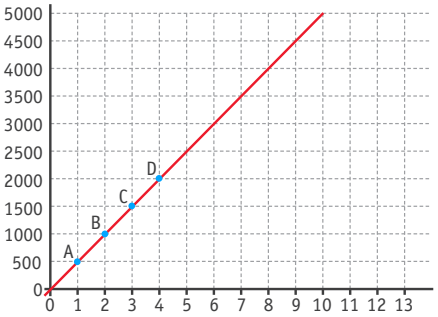


$2 \bullet 3 \bullet 2 = 12$

Se puede escoger entre 12 menús.

Proporciones directas e inversas y características de la gráfica

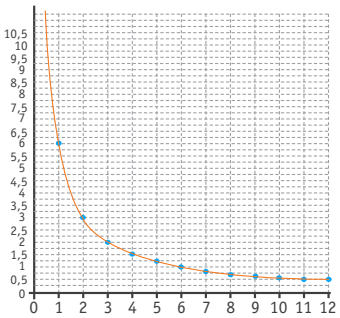
Proporcionalidad directa



La proporcionalidad directa tiene un factor k determinado por la relación $y : x = k$

Así, la ecuación que está representada en el gráfico está dada por $y = k \bullet x$

Proporcionalidad inversa



La proporcionalidad inversa tiene un factor k determinado por la relación $x \bullet y = k$

Así la ecuación que está representada en el gráfico está dada por: $y = \frac{k}{x}$; $x \neq 0$

Regla aditiva

Si los eventos A y B son mutuamente excluyentes, es decir, $A \cap B \neq \emptyset$, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Si los eventos no son mutuamente excluyentes, es decir, su intersección no es distinta de vacío, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - A \bigcap B$$

Ejemplo 1:

Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que se obtenga un número impar o mayor que tres?

Evento A: que salga un número impar.

Evento B: que salga un número mayor que tres.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Ejemplo 2:

En una urna existen 8 bolas numeradas del 1 al 8. ¿Cuál es la probabilidad de sacar en una sola extracción una bola enumerada con un número primo o con un número impar?

Evento A: que salga un número primo.

Evento B: que salga un número impar.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

Regla multiplicativa

Si los eventos A y B son independientes, entonces:

$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$

Ejemplo:

Al lanzar dos veces un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga dos veces el número 5?

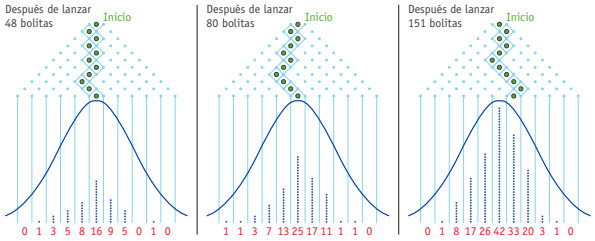
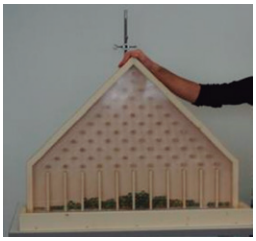
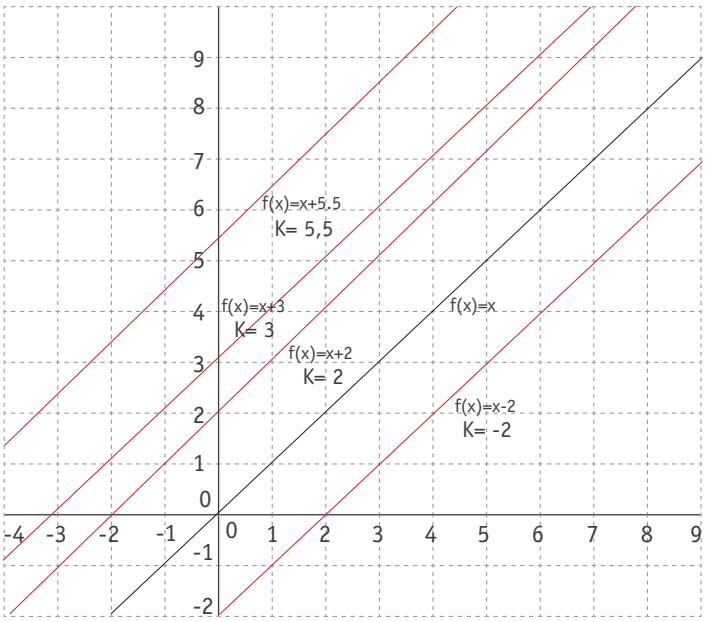
$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \bullet \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Tabla de doble entrada

Permite organizar los datos y visualizar características de una muestra.

Ejemplo:

	HOMBRES	MUJERES	TOTAL
NATACIÓN	15	22	37
FÚTBOL	25	10	35
TOTAL	40	32	¿?

Tabla de Galton	Es un experimento que permite visualizar un paseo al azar, en que hay una mayor probabilidad de llegar a los casilleros del centro. Su construcción requiere de casilleros (columnas), filas de división y, en su parte superior, una distribución de tabiques (clavos) fijos en forma triangular, como muestra la imagen. Por el orificio de la punta de la tabla de Galton se dejan caer bolas de un tamaño adecuado. Se puede construir de forma manual o usando *software* matemático.  
Traslación del gráfico de una función lineal	A partir del gráfico de la función lineal f(x) = x, se traslada la representación gráfica de la función mediante la constante k, generando así el gráfico de la función afín. Ejemplo: La función lineal se trasladó según el factor k descrito en la imagen. 
Triángulos y cuadriláteros congruentes	Dos figuras son congruentes cuando tienen igual medida de sus lados y de sus ángulos, respectivamente. Hay diferentes formas de construir triángulos congruentes. Una de ellas es teniendo la medida de los tres lados. En el caso de la construcción de cuadriláteros, se deben identificar los triángulos que hay en el cuadrilátero (mínimo dos) y utilizar la construcción de triángulos para ello.

ANEXO 2

PROGRESIÓN DE HABILIDADES DE 7° BÁSICO A 2° MEDIO

	7° BÁSICO	8°BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
RESOLVER PROBLEMAS	**OA a** Resolver problemas utilizando estrategias tales como: • Destacar la información dada. • Usar un proceso de ensayo y error sistemático. • Aplicar procesos reversibles. • Descartar información irrelevante. • Usar problemas similares.	**OA a** Resolver problemas utilizando estrategias tales como: • Destacar la información dada. • Usar un proceso de ensayo y error sistemático. • Aplicar procesos reversibles. • Descartar información irrelevante. • Usar problemas similares.	**OA a** Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes: • Simplificar el problema y estimar el resultado. • Descomponer el problema en subproblemas más sencillos. • Buscar patrones. • Usar herramientas computacionales.	**OA a** Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes: • Simplificar el problema y estimar el resultado. • Descomponer el problema en subproblemas más sencillos. • Buscar patrones. • Usar herramientas computacionales.
	OA b Evaluar procedimientos y comprobar resultados propios y de otros de un problema matemático.	**OA b** Evaluar procedimientos y comprobar resultados propios y de otros de un problema matemático.	**OA b** Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático.	**OA b** Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático.
	OA c Utilizar sus propias palabras, gráficos y símbolos matemáticos para presentar sus ideas o soluciones.	**OA c** Utilizar sus propias palabras, gráficos y símbolos matemáticos para presentar sus ideas o soluciones.	**OA c** Utilizar lenguaje matemático para identificar sus propias ideas o respuestas.	**OA c** Utilizar lenguaje matemático para identificar sus propias ideas o respuestas.

ARGUMENTAR Y COMUNICAR	7° BÁSICO	8°BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
	OA d Describir relaciones y situaciones matemáticas de manera verbal y usando símbolos.	**OA d** Describir relaciones y situaciones matemáticas de manera verbal y usando símbolos.	**OA d** Describir relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.	**OA d** Describir relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.
	OA e Explicar y fundamentar: • Soluciones propias y los procedimientos utilizados. • Resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas.	**OA e** Explicar y fundamentar: • Soluciones propias y los procedimientos utilizados. • Resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas.	**OA e** Explicar: • Soluciones propias y los procedimientos utilizados. • Demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas. • Generalizaciones por medio de conectores lógicos y cuantificadores utilizándolos apropiadamente.	**OA e** Explicar: • Soluciones propias y los procedimientos utilizados. • Demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas. • Generalizaciones por medio de conectores lógicos y cuantificadores, utilizándolos apropiadamente.
	OA f Fundamentar conjeturas dando ejemplos y contraejemplos.	**OA f** Fundamentar conjeturas dando ejemplos y contraejemplos.	**OA f** Fundamentar conjeturas usando lenguaje algebraico para comprobar o descartar la validez de los enunciados.	**OA f** Fundamentar conjeturas usando lenguaje algebraico para comprobar o descartar la validez de enunciados.
	OA g Evaluar la argumentación de otros dando razones.	**OA g** Evaluar la argumentación de otros dando razones.	**OA g** Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración si hay saltos o errores.	**OA g** Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración si hay saltos o errores.

	7° BÁSICO	8°BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
MODELAR	**OA h** Usar modelos, realizando cálculos, estimaciones y simulaciones, tanto manualmente como con ayuda de instrumentos para resolver problemas de otras asignaturas y de la vida diaria.	**OA h** Usar modelos, realizando cálculos, estimaciones y simulaciones, tanto manualmente como con ayuda de instrumentos para resolver problemas de otras asignaturas y de la vida diaria.	**OA h** Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.	**OA h** Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.
	OA i Seleccionar y ajustar modelos, para resolver problemas asociados a ecuaciones e inecuaciones de la forma $ax + b >, <, = c$, con $a, b, c \in N$, comparando dependencias lineales.	**OA i** Seleccionar y ajustar modelos, para resolver problemas asociados a ecuaciones e inecuaciones de la forma $ax + b >, <, = c$, con $(a, b, c \in N)$ comparando dependencias lineales.	**OA i** Seleccionar modelos e identificar cuándo dos variables dependen linealmente o afínmente en un intervalo de valores.	**OA i** Seleccionar modelos e identificar cuándo dos variables dependen cuadráticamente o inversamente en un intervalo de valores.
			OA j Ajustar modelos, eligiendo los parámetros adecuados para que se acerquen más a la realidad.	**OA j** Ajustar modelos, eligiendo los parámetros adecuados para que se acerquen más a la realidad.
	OA j Evaluar la pertinencia de modelos: • En relación con el problema presentado. • Considerando sus limitaciones.	**OA j** Evaluar la pertinencia de modelos: • En relación con el problema presentado. • Considerando sus limitaciones.	**OA k** Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad y determinando sus limitaciones.	**OA k** Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad y determinando sus limitaciones.

	7° BÁSICO	8°BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
REPRESENTAR	**OA k** Elegir y utilizar representaciones concretas, pictóricas y simbólicas para enunciados y situaciones en contextos diversos (tablas, gráficos, recta numérica, entre otros).	**OA k** Elegir y utilizar representaciones concretas, pictóricas y simbólicas para enunciados y situaciones en contextos diversos (tablas, gráficos, recta numérica, entre otros).	**OA l** Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de estas.	**OA l** Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de estas.
	OA l Relacionar y contrastar información entre distintos niveles de representación.	**OA l** Relacionar y contrastar información entre distintos niveles de representación.	**OA n** Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos.	**OA n** Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos.
	OA m Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.	**OA m** Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.	**OA o** Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.	**OA o** Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.
			OA m Transitar entre los distintos niveles de representación de funciones.	**OA m** Transitar entre los distintos niveles de representación de funciones.

ANEXO 3

PROGRESIÓN DE OBJETIVOS DE APRENDIZAJE TEMÁTICOS DE 7° BÁSICO 2° MEDIO

NÚMEROS			
7° BÁSICO	8° BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
NÚMEROS Y OPERATORIA			
OA 1 Mostrar que comprenden la adición y la sustracción de números enteros: • Representando los números enteros en la recta numérica. • Representándolas de manera concreta, pictórica y simbólica. • Dándole significado a los símbolos + y – según el contexto (por ejemplo: un movimiento en una dirección seguido de un movimiento equivalente en la oposición opuesta no representa ningún cambio de posición). • Resolviendo problemas en contextos cotidianos.	**OA 1** Mostrar que comprenden la multiplicación y la división de números enteros: • Representándolas de manera concreta, pictórica y simbólica. • Aplicando procedimientos usados en la multiplicación y la división de números naturales. • Aplicando la regla de los signos de la operación. • Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios.	**OA 1** Calcular operaciones con números racionales en forma simbólica.	**OA 1** Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales: • Utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces. • Combinado raíces con números racionales. • Resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos.

NÚMEROS			
7° BÁSICO	8° BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
OA 2 Explicar la multiplicación y la división de fracciones positivas: • Utilizando representaciones concretas, pictóricas y simbólicas. • Relacionándolas con la multiplicación y la división de números decimales.	**OA 2** Utilizar las operaciones de multiplicación y división con los números racionales en el contexto de la resolución de problemas: • Representándolos en la recta numérica. • Involucrando diferentes conjuntos numéricos (fracciones, decimales y números enteros).		
OA 3 Resolver problemas que involucren la multiplicación y la división de fracciones y de decimales positivos de manera concreta, pictórica y simbólica (de forma manual y/o con *software* educativo).			

NÚMEROS			
7° BÁSICO	8° BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
PROPORCIONES			
OA 4 Mostrar que comprenden el concepto de porcentaje: • Representándolo de manera pictórica. • Calculando de varias maneras. • Aplicándolo a situaciones sencillas.	**OA 5** Resolver problemas que involucran variaciones porcentuales en contextos diversos, usando representaciones pictóricas y registrando el proceso de manera simbólica; por ejemplo: el interés anual del ahorro.		
POTENCIAS Y RAÍCES			
OA 5 Utilizar potencias de base 10 con exponente natural: • Usando los términos potencia, base, exponente, elevado. • Definiendo y usando el exponente 0 en el sistema decimal. • Expresando números naturales en notación científica (sistema decimal). • Resolviendo problemas, usando la notación científica.	**OA 3** Explicar la multiplicación y la división de potencias de base natural y exponente natural hasta 3, de manera concreta, pictórica y simbólica.	**OA 2** Mostrar que comprenden las potencias de base racional y exponente entero: • Transfiriendo propiedades de la multiplicación y división de potencias a los ámbitos numéricos correspondientes. • Relacionándolas con el crecimiento y decrecimiento de cantidades. • Resolviendo problemas de la vida diaria y otras asignaturas.	**OA 2** Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos: • Comparando representaciones de potencias de exponente racional con raíces enésimas en la recta numérica. • Convirtiendo raíces enésimas a potencias de exponente racional y viceversa. • Describiendo la relación entre potencias y logaritmos. • Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que involucren potencias, logaritmos y raíces enésimas.
	OA 4 Mostrar que comprenden las raíces cuadradas de números naturales: • Estimándolas de manera intuitiva. • Representándolas de manera concreta, pictórica y simbólica. • Aplicándolas en situaciones geométricas y en la vida diaria.		

ÁLGEBRA Y FUNCIONES			
7° BÁSICO	8° BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
EXPRESIONES ALGEBRAICAS			
OA 6 Utilizar el lenguaje algebraico para generalizar relaciones entre números, para establecer y formular reglas y propiedades y construir ecuaciones. **OA 7** Reducir expresiones algebraicas, reuniendo términos semejantes para obtener expresiones de la forma $ax + by + cz$ $(a, b, c \in Z)$	**OA 6** Mostrar que comprenden la operatoria de expresiones algebraicas: • Representándolas de manera pictórica y simbólica. • Relacionándolas con el área de cuadrados, rectángulos y volúmenes de paralelepípedos. • Determinando formas factorizadas.	**OA 3** Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica: • Transformando productos en adiciones y viceversa. • Aplicándolos a situaciones concretas. • Completando el cuadrado del binomio. • Utilizándolos en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas.	

ÁLGEBRA Y FUNCIONES

7° BÁSICO	8° BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
FUNCIONES			
OA 8 Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: • Realizando tablas de valores para relaciones proporcionales. • Graficando los valores de la tabla. • Explicando las características de la gráfica. • Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.	**OA 7** Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: • Utilizando tablas. • Usando metáforas de máquinas. • Estableciendo reglas entre x e y. • Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con *software* educativo. **OA 10** Mostrar que comprenden la función afín: • Generalizándola como la adición de una constante con una función lineal. • Trasladando funciones lineales en el plano cartesiano. • Determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo. • Relacionándola con el interés simple. • Utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.	**OA 5** Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma $f(x,y) = ax + by$; por ejemplo: un haz de rectas paralelas en el plano cartesiano, líneas de nivel en planos inclinados (techo), propagación de olas en el mar y la formación de algunas capas de rocas: • Creando tablas de valores con a,b fijo y x,y variable. • Representando una ecuación lineal dada por medio de un gráfico, de manera manual y/o con *software* educativo. • Escribiendo la relación entre las variables de un gráfico dado; por ejemplo, variando c en la ecuación $ax + by = c$; $a, b, c \in Q$ (decimales hasta la décima).	**OA 3** Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$: $(a \neq 0)$: • Reconociendo la función cuadrática $f(x) = ax^2$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas. • Representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con *software* educativo. • Determinando puntos especiales de su gráfica. • Seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda. **OA 5** Mostrar que comprenden la inversa de una función: • Utilizando la metáfora de una máquina. • Representándola por medio de tablas y gráficos, de manera manual y/o con *software* educativo. • Utilizando la reflexión de la función representada en el gráfico en un plano cartesiano. • Calculando las inversas en casos de funciones lineales y cuadráticas.

ÁLGEBRA Y FUNCIONES			
7° BÁSICO	8° BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
			OA 6 Explicar el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo: • Por medio de situaciones de la vida real y de otras asignaturas. • Identificándolo con el interés compuesto. • Representándolo de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo. • Expresándolo en forma recursiva $f(t + 1) - f(t) = a \cdot f(t)$. • Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

ÁLGEBRA Y FUNCIONES			
7° BÁSICO	8° BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
ECUACIONES E INECUACIONES			
OA 9 Modelar y resolver problemas diversos de la vida diaria y de otras asignaturas que involucran ecuaciones e inecuaciones lineales de la forma: • $ax = b$; $\frac{x}{a} = b$ a, b y $c \in Z$; $a \neq 0$ • $ax < b$; $ax > b$ $\frac{x}{a} < b$; $\frac{x}{a} > b$ a, b y $c \in N$; $a \neq 0$	**OA 8** Modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, usando ecuaciones lineales de la forma: • $ax = b$; $\frac{x}{a} = b$, $a \neq 0$; • $ax + b = c$; $\frac{x}{a} + b = c$; • $ax = b + cx$; $a(x + b) = c$; • $ax + b = cx + d$ (a, b, c, d, $e \in Q$) **OA 9** Resolver inecuaciones lineales con coeficientes racionales en el contexto de la resolución de problemas, por medio de representaciones gráficas, simbólicas, de manera manual y/o con *software* educativo.	**OA 4** Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2x2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con *software* educativo.	**OA 4** Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas de la forma: • $ax^2 = b$ • $(ax + b)^2 = c$ • $ax^2 + bx = 0$ • $ax^2 + bx = c$ (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)

GEOMETRÍA			
7° BÁSICO	8° BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
CONSTRUCCIONES Y MEDIDAS			
OA 10 Descubrir relaciones que involucran ángulos exteriores o interiores de diferentes polígonos.	**OA 11** Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros: • Estimando de manera intuitiva área de superficie y volumen. • Desplegando la red de prismas rectos para encontrar la fórmula del área de superficie. • Transfiriendo la fórmula del volumen de un cubo (base por altura) en prismas diversos y cilindros. • Aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria.	**OA 6** Desarrollar la fórmula de los valores del área y del perímetro de sectores y segmentos circulares, respectivamente, a partir de ángulos centrales de 60°, 90°, 120° y 180°, por medio de representaciones concretas.	
OA 13 Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios.		**OA 7** Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficie y el volumen del cono: • Desplegando la red del cono para la fórmula del área de superficie. • Experimentando de manera concreta para encontrar la relación entre el volumen del cilindro y el cono. • Aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria.	

GEOMETRÍA			
7° BÁSICO	8° BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
OA 11 Mostrar que comprenden el círculo: • Describiendo las relaciones entre el radio, el diámetro y el perímetro del círculo. • Estimando de manera intuitiva el perímetro y el área de un círculo. • Aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas geométricos de otras asignaturas y de la vida diaria. • Identificándolo como lugar geométrico.			**OA 7** Desarrollar las fórmulas del área de la superficie y del volumen de la esfera: • Conjeturando la fórmula. • Representando de manera concreta y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo. • Resolviendo problemas de la vida diaria y de geometría.
OA 12 Construir objetos geométricos de manera manual y/o con *software* educativo: • Líneas, como las perpendiculares, las paralelas, las bisectrices y alturas en triángulos y cuadriláteros. • Puntos, como el punto medio, el centro de gravedad, el centro del círculo inscrito y del circunscrito de un triángulo. • Triángulos y cuadriláteros congruentes.			

GEOMETRÍA			
7° BÁSICO	8° BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
PLANO CARTESIANO, TRANSFORMACIONES Y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS			
OA 14 Identificar puntos en el plano cartesiano, usando pares ordenados y vectores de forma concreta (juegos) y pictórica.	**OA 14** Componer rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio, de manera manual y/o con *software* educativo, y aplicar a la simetría de polígonos y poliedros y a la resolución de problemas geométricos relacionados con el arte.		**OA 8** Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos: • Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos. • Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo. • Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados. • Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.

GEOMETRÍA			
7° BÁSICO	8° BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
	OA 13 Describir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, de manera manual y/o con *software* educativo, utilizando: • Los vectores para la traslación. • Los ejes del plano cartesiano como ejes de reflexión. • Los puntos del plano para las rotaciones.	**OA 8** Mostar que comprenden el concepto de homotecia: • Relacionándola con la perspectiva, el funcionamiento de instrumentos ópticos y el ojo humano. • Midiendo segmentos adecuados para determinar las propiedades de la homotecia. • Aplicando propiedades de la homotecia en la construcción de objetos, de manera manual y/o con *software* educativo. • Resolviendo problemas de la vida cotidiana y de otras asignaturas.	**OA 9** Aplicar las razones trigonométricas en diversos contextos en la composición y descomposición de vectores y determinar las proyecciones de vectores.
		OA 9 Desarrollar el teorema de Tales mediante las propiedades de la homotecia, para aplicarlo en la resolución de problemas.	

GEOMETRÍA			
7° BÁSICO	8° BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
	OA 12 Explicar, de manera concreta, pictórica y simbólica, la validez del teorema de Pitágoras y aplicar a la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana, de manera manual y/o con *software* educativo.	**OA 10** Aplicar propiedades de semejanza y de proporcionalidad a modelos a escala y otras situaciones de la vida diaria y otras asignaturas. **OA 11** Representar el concepto de homotecia de forma vectorial, relacionándolo con el producto de un vector por un escalar, de manera manual y/o con *software* educativo.	

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA			
7° BÁSICO	8° BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
DATOS Y MUESTRAS			
OA 15 Estimar el porcentaje de algunas características de una población desconocida por medio del muestreo.	**OA 15** Mostrar que comprenden las medidas de posición, percentiles y cuartiles: • Identificando la población que está sobre o bajo el percentil. • Representándolas con diagramas, incluyendo el diagrama de cajón, de manera manual y/o con *software* educativo. • Utilizándolas para comparar poblaciones.	**OA 12** Registrar distribuciones de dos características distintas, de una misma población, en una tabla de doble entrada y en una nube de puntos.	**OA 10** Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas: • Definiendo la variable. • Determinando los posibles valores de la incógnita. • Calculando su probabilidad. • Graficando sus distribuciones.
OA 16 Representar datos obtenidos en una muestra mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, utilizando gráficos apropiados, de manera manual y/o con *software* educativo.			
OA 17 Mostrar que comprenden las medidas de tendencia central y el rango: • Determinando las medidas de tendencia central para realizar inferencias sobre la población. • Determinando la medida de tendencia central adecuada para responder un problema planteado. • Utilizándolos para comparar dos poblaciones. • Determinando el efecto de un dato que es muy diferente a los otros.		**OA 13** Comparar poblaciones mediante la confección de gráficos “xy” para dos atributos de muestras, de manera concreta y pictórica: • Utilizando nubes de puntos en dos colores. • Separando la nube por medio de una recta trazada de manera intuitiva.	

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA			
7° BÁSICO	8° BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
	OA 16 Evaluar la forma en que los datos están presentados: • Comparando la información de los mismos datos representada en distintos tipos de gráficos para determinar fortalezas y debilidades de cada uno. • Justificando la elección del gráfico para una determinada situación y su correspondiente conjunto de datos. • Detectando manipulaciones de gráficos para representar datos.		
PROBABILIDAD Y COMBINATORIA			
OA 18 Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con *software* educativo: • Estimándolas de manera intuitiva. • Utilizando frecuencias relativas. • Relacionándolas con razones, fracciones o porcentaje.	**OA 17** Explicar el principio combinatorio multiplicativo: • A partir de situaciones concretas. • Representándolo con tablas y árboles regulares, de manera manual y/o con *software* educativo. • Utilizándolo para calcular la probabilidad de un evento compuesto.	**OA 14** Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo, en el contexto de la resolución de problemas.	**OA 11** Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA			
7° BÁSICO	8° BÁSICO	1° MEDIO	2° MEDIO
OA 19 Comparar las frecuencias relativas de un evento obtenidas al repetir un experimento de forma manual y/o con *software* educativo, con la probabilidad obtenida de manera teórica, usando diagramas de árbol, tablas o gráficos.			**OA 12** Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad: • Revisando informaciones de los medios de comunicación. • Identificando suposiciones basadas en probabilidades. • Explicando cómo una probabilidad puede sustentar suposiciones opuestas. • Explicando decisiones basadas en situaciones subjetivas o en probabilidades.
		OA 15 Mostrar que comprenden el concepto de azar: • Experimentando con la tabla de Galton y con paseos aleatorios sencillos de manera manual y/o con *software* educativo. • Realizando análisis estadísticos, empezando por frecuencias relativas. • Utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso. • Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.	

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

9789562926058